

Invariances, symétries et lois de conservation en physique quantique

Hadrien Montanelli

3 janvier 2011

Table des matières

Introduction	6
I De la physique classique à la physique quantique	8
1 La physique classique	10
1.1 La dualité onde-particule	10
1.1.1 Le concept de particule	10
1.1.2 Le concept d'onde	11
1.1.3 L'interaction onde-particule	11
1.2 Lois fondamentales et branches de la physique classique	12
1.2.1 Mécanique classique, première loi de Newton et correction relativiste . . .	12
1.2.2 Electromagnétisme classique, équations de Maxwell et force de Lorentz . .	12
1.2.3 Thermodynamique classique	12
1.3 Références pour le chapitre 1	13
2 Constantes fondamentales et nécessité d'une théorie quantique	14
2.1 Constantes fondamentales et théories physiques	14
2.2 Nécessité d'une théorie quantique : l'exemple de l'effet photoélectrique	15
2.3 Références pour le chapitre 2	15
3 Le critère quantique	16
3.1 Unité de \hbar et premiers exemples d'invariances	16
3.2 Le critère quantique	17
3.3 Références pour le chapitre 3	17
4 Ordres de grandeur en physique quantique	18
4.1 L'atome d'hydrogène comme étalon quantique	18
4.2 Ordres de grandeur en physique des particules	19
4.3 Références pour le chapitre 4	19
5 Lois quantiques : invariances et unification	20
5.1 La loi de Planck-Einstein	20
5.2 La loi de de Broglie-Einstein	21
5.3 La quantification du moment cinétique	21
5.4 Un nouveau concept : le quanton	22
5.5 Références pour le chapitre 5	22

II	La théorie de groupes : la symétrie en acte	24
6	Rappels sur les groupes	26
6.1	Principales définitions	26
6.1.1	Groupe et sous-groupe	26
6.1.2	Classes à gauche, classes à droite et théorème de Lagrange	27
6.1.3	Morphismes de groupes, conjugaison et sous-groupe invariant	27
6.2	Groupes notoires	28
6.2.1	Groupes de nombres	28
6.2.2	Groupes de transformations	28
6.2.3	Groupes matriciels	29
6.3	Le concept fondamental de "groupe opérant sur un ensemble"	30
6.3.1	Le langage	30
6.3.2	Illustrations	33
6.4	Références pour le chapitre 6	35
7	Groupes et algèbres de Lie	36
7.1	Algèbres de Lie	36
7.1.1	Définition et exemples	36
7.1.2	Morphismes d'algèbres de Lie	37
7.1.3	Relations de commutation et constantes de structure	38
7.1.4	Formes réelles d'une algèbre de Lie	39
7.1.5	Représentations d'algèbres de Lie	39
7.2	L'application exponentielle	40
7.3	Sous-groupe à un paramètre	44
7.4	Groupes de Lie	47
7.5	Algèbre de Lie d'une groupe de Lie	47
7.6	Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie	51
7.6.1	Morphisme de groupes de Lie et différentielle d'un morphisme de groupes de Lie	51
7.6.2	Représentation d'un groupe de Lie et différentielle d'une représentation d'un groupe de Lie	52
7.6.3	La représentation adjointe	52
7.7	Références pour le chapitre 7	53
8	Les groupes de Lie $\mathcal{SO}(3)$ et $SU(2)$	54
8.1	Les algèbres de Lie $\mathfrak{so}(3)$ et $\mathfrak{su}(2)$	54
8.1.1	Bases de $\mathfrak{su}(2)$	54
8.1.2	Bases de $\mathfrak{so}(3)$	55
8.1.3	Isomorphisme entre $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$	55
8.2	Le morphisme de revêtement de $SU(2)$ sur $\mathcal{SO}(3)$	56
8.2.1	Le groupe $\mathcal{SO}(3)$	56
8.2.2	Le groupe $SU(2)$	58
8.2.3	Projection de $SU(2)$ sur $\mathcal{SO}(3)$	60
8.3	Références pour le chapitre 8	61

III Application en physique quantique : invariances, symétries et lois de conservation	62
9 Théorème de Noether et lois de conservation en physique classique	64
9.1 Les équations de Lagrange	64
9.2 Invariance par translation temporelle	66
9.3 Invariance par translation spatiale	67
9.4 Invariance par rotation	68
9.5 Théorème de Noether	70
9.6 Références pour le chapitre 9	72
10 Théorème de Wigner et conséquences	74
10.1 Rayon unitaire de l'espace des états	74
10.2 Théorème de Wigner	75
10.3 Conséquences du théorème de Wigner	78
10.4 Références pour le chapitre 10	79
11 Théorème de Noether, générateurs infinitésimaux et lois de conservation en physique quantique	80
11.1 Générateurs infinitésimaux	80
11.1.1 Généralités	80
11.1.2 Un mot sur les opérateurs	82
11.1.3 Générateurs infinitésimaux des translations spatiales	82
11.1.4 Générateurs infinitésimaux des translations temporelles	84
11.1.5 Générateurs infinitésimaux des rotations	84
11.2 Théorème de Noether et lois de conservation en physique quantique	87
11.2.1 Equation de Schrödinger et évolution de la valeur moyenne d'un observable	87
11.2.2 Invariance par translation spatiale	88
11.2.3 Invariance par translation temporelle	89
11.2.4 Invariance par rotation	89
11.2.5 Théorème de Noether en physique quantique	91
11.3 Références pour le chapitre 11	92
Conclusion et discussion	94
Bibliographie	96

Introduction

Cet exposé a été réalisé dans le cadre de mon Projet d'Initiation à la Recherche, projet de fin de première année à Supaéro. L'objet de celui-ci est d'introduire certains concepts mathématiques liés à la théorie des groupes pour étudier le lien entre symétries et lois de conservation en physique quantique. Mon travail a consisté en une étude bibliographique sur le sujet : je précise à chaque fin de chapitre les sources que j'ai utilisées.

Dans la première partie, je montre qualitativement pourquoi les lois de Planck-Einstein, de Broglie et de quantification du moment cinétique peuvent être perçues comme des lois d'invariance et d'unification de concepts classiques. C'est une partie introductive qui permet de se familiariser avec la physique quantique et qui présente une première approche des invariances que je traiterai.

Pour cela, il m'a fallu revenir sur les concepts classiques d'ondes et de particules, et sur leur dualité fondamentale.

J'ai ensuite tenté de montrer qu'une théorie quantique était nécessaire, en partant de l'exemple historique de l'effet photoélectrique (Einstein, 1905).

Après deux sous-parties sur le domaine de validité de la physique quantique et sur ses ordres de grandeur caractéristiques, qui permettent de mieux appréhender le domaine quantique, j'en viens aux démonstrations qualitatives évoquées plus haut.

Dans la seconde partie, mathématique, je m'approprie les outils mathématiques nécessaires au développement plus profond de l'étude de la symétrie en physique quantique.

Après quelques rappels généraux de théorie des groupes, et une introduction au concept d'action de groupe sur un ensemble, je m'intéresse aux groupes et algèbres de Lie. J'étudie les concepts de groupe de Lie, d'algèbre de Lie, de sous-groupe à un paramètre d'un groupe topologique, d'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, ainsi que leurs représentations respectives liées par la notion de différentielle de morphisme de groupe de Lie. Dans ces développements, l'exponentielle matricielle joue un rôle majeur : elle est d'une part le lien pratique entre groupe de Lie et algèbre de Lie du groupe, et d'autre part au coeur de la théorie des groupes à un paramètre de $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$. C'est pour cette dernière raison qu'elle apparaîtra naturellement dans l'étude des lois de conservation en physique quantique.

Je termine cette partie par l'étude d'un groupe de Lie particulier, le groupe de Lie $SO(3)$. C'est le groupe des rotations de l'espace euclidien à trois dimensions. Il joue un rôle majeur en physique quantique puisqu'il contient les opérateurs liés au moment cinétique.

Dans la troisième et dernière partie, je rentre dans le coeur du sujet : j'explicité les liens entre symétries, invariances et lois de conservation en physique.

Je commence par étudier les invariances en physique classique : j'essaie de déterminer quelles quantités sont conservées lorsque les lois de la physique décrivant un phénomène donné présentent une symétrie, c'est à dire lorsqu'elles sont invariantes par une certaine transformation géométrique. Je commence par m'intéresser aux transformations géométriques que je qualifierai

d'usuelles : translations spatiales, translations temporelles et rotations. J'aboutis alors au théorème de Noether, qui assure l'existence d'une quantité conservée à chaque fois que les lois de la physique présentent une symétrie quelconque. Les calculs explicites sont faits sous le formalisme lagrangien.

Je m'intéresse ensuite au théorème de Wigner et à ses conséquences. Après une mise au point conceptuelle sur les rayons unitaires de l'espace des états d'un système physique, je présente le théorème, qui établit une correspondance entre transformations sur les rayons unitaires et transformations sur les vecteurs de l'espace des états. Ce théorème a pour conséquences de faire jouer un rôle particulier aux transformations unitaires et légitime l'étude des représentations de groupes de transformations.

J'en arrive alors aux invariances en physique quantique. Je commence par quelques rappels sur les générateurs infinitésimaux, déjà étudiés dans la partie 2, et je rappelle le lien entre opérateur sur l'espace des états et propriété physique. Je montre alors que le générateur infinitésimal de la transformation - qui en physique classique était liée à une certaine quantité - est précisément l'opérateur lié à cette propriété en physique quantique. Cela me permet de généraliser les lois de conservation obtenues en physique classique à la physique quantique.

Je souhaiterais remercier chaleureusement mon professeur de mathématiques de première année en classes préparatoires, Mr Alessandi, pour les représentations mentales qu'il m'a permises de forger et pour ses initiations à la physique quantique, notamment à travers des devoirs sur le spin de l'électron. Je remercie aussi chaleureusement mes deux encadrants de PIR, Mr Teichteil et Mr Claeys, pour leurs conseils avisés et leur disponibilité. Enfin, je remercie le service de reprographie de Supaéro pour l'impression de nombreux documents et pour l'édition de mon exposé.

Première partie

De la physique classique à la physique
quantique

Chapitre 1

La physique classique

1.1 La dualité onde-particule

Jusqu'à la fin du XIX^e siècle, la physique classique est très largement acceptée par la communauté scientifique qui considère ses concepts de base universels et définitifs : les concepts d'onde (ou de champ) et de particule.

Je vais présenter brièvement ces deux concepts, montrer en quoi ils sont duaux et comment l'interaction entre les particules est médiatisée par les champs classiques.

1.1.1 Le concept de particule

Le concept de particule est une idéalisation d'une classe d'objets réels dont le prototype est la boule de billard.

Avant tout, la notion de particule est liée au caractère discret de la boule de billard : on peut l'individualiser, c'est à dire la distinguer d'une autre, et son extension spatiale est finie.

Le concept de particule ponctuelle va plus loin dans l'élagage idéologique : l'extension spatiale est réduite à un point géométrique. Cela renvoie à des situations dans lesquelles les dimensions de l'objet sont négligeables par rapport aux longueurs caractéristiques du phénomène à étudier. La particule est repérée par sa position : au cours du temps elle décrit dans l'espace une ligne géométrique, sa trajectoire. Dans l'espace-temps, à chaque particule est associée une courbe qui représente l'histoire de la particule : sa ligne d'Univers. L'unicité de celle-ci indique bien le caractère individuel de la particule.

La notion de particule modélise des objets réels en cela qu'on lui confère un certain nombre de propriétés physiques qui la caractérisent en tant qu'objet physique particulier (masse, charge, spin...). Ses caractéristiques sont liées à des interactions particulières et leurs valeurs indiquent l'intensité avec laquelle la particule subit et exerce ces interactions. En physique classique, on décrit ces interactions par l'intermédiaire de champs. Je développerai ceci dans les deux sous-parties suivantes, consacrées aux champs et aux interactions entre particules.

On confère également aux particules un certain nombre de grandeurs qui décrivent leur état de mouvement. En particulier, on leur confère - en plus des propriétés spatio-temporelles (position) - une masse (quantité de matière rassemblée dans la particule) et des propriétés dynamiques : énergie, quantité de mouvement, moment cinétique. Ces grandeurs tirent leur importance du fait de leur conservation pour un système isolé. Ces lois de conservation sont liées à la structure de l'espace-temps pour un système isolé et sont associées à une symétrie de cet espace. L'espace-temps est en effet - pour un système isolé - (et ceci est **postulé**) isotrope, homogène et le temps s'y écoule de façon uniforme : ces trois caractéristiques vont alors engendrer la conservation du moment cinétique, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Je reparlerai de ces principes généraux dès le chapitre 5 (lois quantiques : invariances et unification) et cela fera l'objet du chapitre 9 (théorème de Noether et lois de conservation en physique classique).

1.1.2 Le concept d'onde

L'autre notion clef de la physique classique est celle d'onde (ou de champ). C'est une idéalisation de certains phénomènes réels dont un prototype est le mouvement des vagues à la surface de l'eau.

La notion de champ s'oppose à celle de particule du fait de son caractère essentiellement continu, par opposition au caractère discret de la particule. Une onde est un objet dont l'habillage mathématique est une quantité scalaire ou vectorielle définie en tout point de l'espace-temps : son extension spatiale est en principe indéfinie.

L'évolution temporelle d'un phénomène ondulatoire est également intrinsèquement différente du mouvement d'une particule que l'on peut suivre individuellement se déplacer dans l'espace-temps : un champ se propage et son mouvement est de type "frontal". Il est régi par des équations de propagation qui sont en fait les équations du mouvement du champ dans l'espace-temps : la propagation du champ électro-magnétique est par exemple régie par les lois de Maxwell, qui forment 4 des 7 lois fondamentales de la physique classique (cf 1.2 : Lois fondamentales et branches de la physique classique).

Les équations de propagation vont permettre de définir les quantités analogues - pour l'onde - à l'énergie, la quantité de mouvement et le moment cinétique : ce sont précisément la pulsation, le vecteur d'onde et l'angulation, que je définirai plus tard (cf 5.3 : la quantification du moment cinétique).

Enfin, une dernière différence fondamentale apparaît dans la "rencontre" de deux champs. Si deux particules se rencontrent en une même zone spatiale, elles vont entrer en collision, "rebondir", et leur mouvement va être modifié. Pour les champs, le phénomène est radicalement différent. Si les fonctions $\Psi_1(r,t)$ et $\Psi_2(r,t)$ sont solutions de la même équation de propagation, en se plaçant dans un cadre mathématique linéaire (bien plus facile à traiter), soit parce-que les équations issues des lois physiques le sont (équations de Maxwell dans le vide), soit par linéarisation de la théorie (sous réserve de validité), alors $\Psi_1(r,t)+\Psi_2(r,t)$ vérifie les mêmes équations de propagation, et la "rencontre" des deux champs est simplement la superposition $\Psi_1(r,t)+\Psi_2(r,t)$. On dit alors que le champ obéit au principe de superposition : ce principe crucial apparaîtra naturellement en physique quantique sous la forme d'espace d'états de Hilbert.

1.1.3 L'interaction onde-particule

C'est par la mise en jeu alternée des deux concepts d'onde et de particule que la physique classique décrit les phénomènes naturels.

En particulier, l'interaction à distance entre particules, est expliquée par une contribution subtile des caractéristiques de l'un et de l'autre.

Plutôt que comme une influence directe, sans intermédiaire, on la conçoit comme médiatisée par un champ. Engendré par la première particule, ce champ se propage, puis agit sur la seconde. La seconde agit inévitablement sur la première par le même mécanisme, de sorte que cette deuxième particule est aussi "source" de champ. Les lois décrivant ce phénomène, au lieu de se résumer en l'expression de la force agissant entre deux particules, comportent maintenant d'une part les équations de propagation du champ, et d'autre part l'expression de la force exercée par le champ sur une particule. Les interactions décrites par la physique classique sont l'interaction gravitationnelle et l'interaction électromagnétique.

Conclusion La matière doit être comprise, en physique classique, comme constituée de champs et de particules. Un objet complexe contient un certain nombre de particules et le champ qu'elles engendrent et qui les lie.

Les êtres physiques sont ainsi soit des champs, soit des ondes, sans aucune ambiguïté.

1.2 Lois fondamentales et branches de la physique classique

La physique classique comporte 3 branches principales, qui ont chacune des ramifications, et sept lois fondamentales - des **postulats** - qui permettent de décrire un grand nombre de phénomènes physiques.

1.2.1 Mécanique classique, première loi de Newton et correction relativiste

La mécanique classique explique les causes du mouvement des particules. Elle repose sur la première loi de Newton qui relie la résultante \vec{F} des forces exercées sur la particule et sa quantité de mouvement \vec{p} :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1.1)$$

Sous cette forme, elle peut être appliquée dans le cadre de la relativité restreinte en utilisant :

$$\vec{p}' = \gamma \vec{p} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.2)$$

1.2.2 Electromagnétisme classique, équations de Maxwell et force de Lorentz

L'électromagnétisme classique explique la propagation des ondes, et en particulier de la lumière. Cette théorie repose sur quatre lois fondamentales, les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Le lien entre la mécanique classique et l'électromagnétisme classique est fourni par la loi de Lorentz donnant la force exercée sur une particule de charge q et de vitesse \vec{v} , en présence d'un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (1.4)$$

1.2.3 Thermodynamique classique

La thermodynamique classique explique les échanges de chaleur entre les corps. Elle se déduit du second principe de la thermodynamique : il n'existe pas de dispositif suivant un cycle dont le seul effet serait de fournir du travail à partir d'une source de chaleur unique.

L'origine microscopique du second principe a été comprise par Boltzmann et Gibbs à la fin du XIX^e siècle. Ils ont fondé la physique statistique classique dont le résultat fondamental est la loi de Boltzmann : la probabilité $p(E)$ qu'un système physique à la température T ait une énergie E comprend un facteur, le poids de Boltzmann $p_B(E)$:

$$p_B(E) = e^{-\frac{E}{k_B T}} \quad (1.5)$$

où k_B est appelée constante de Boltzmann. Ce résultat est démontré et n'est donc pas une loi fondamentale !

Bilan J'ai décrit les lois fondamentales (1.1)-(1.4) de la physique classique qui se résument finalement à sept équations.

Les multiples autres lois sont des conséquences de celles-ci : la loi de Coulomb est par exemple une conséquence des lois de Maxwell et de l'expression de la force de Lorentz, et l'équation d'Euler en mécanique des fluides est une conséquence de la première loi de Newton.

D'autres lois sont dites phénoménologiques et ne sont en général qu'un premier terme d'un développement de Taylor : la force qui relie gradient de vitesse et viscosité en mécanique des fluides par exemple. Les domaines tels que l'élasticité ou la mécanique des fluides découlent ainsi de la première loi de Newton et d'un certain nombre de lois phénoménologiques.

Finalement, il faut bien distinguer les sept lois fondamentales et les nombreuses lois phénoménologiques que la physique classique utilise, faute de mieux, pour décrire la matière.

1.3 Références pour le chapitre 1

[Le Bellac] et [Lévy-Leblond].

Chapitre 2

Constantes fondamentales et nécessité d'une théorie quantique

2.1 Constantes fondamentales et théories physiques

Toute théorie physique établit des lois entre certains de ses concepts de base. J'ai présenté dans le chapitre précédent les sept lois fondamentales de la physique classique. Dans ces lois s'introduisent des constantes fondamentales liées au choix des unités de notre système d'unité : on a par exemple vu apparaître la célérité de la lumière c dans la correction relativiste de \vec{p} . L'application d'une théorie physique doit permettre d'exprimer les grandeurs étudiées en fonction des paramètres physiques du système étudié et des constantes fondamentales de la théorie utilisée.

L'analyse dimensionnelle permet le plus souvent d'écrire les expressions recherchées à un facteur numérique près, en combinant judicieusement les paramètres physiques du système et les constantes fondamentales mises en jeu.

La mise en oeuvre détaillée de la théorie (*ie* écrire les équations physiques modélisant le phénomène) permettra ensuite de calculer ce facteur numérique.

Exemple : Une analyse dimensionnelle du problème du pendule simple doit permettre de trouver la période T à un facteur près. Les paramètres du système et les constantes mises en jeu sont : la longueur du pendule l et l'accélération de pesanteur g . La seule solution possible pour T est ainsi :

$$T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$$

La mise en place effective des calculs donnerait bien sûr $k=2\pi$.

Si, inversement, on ne peut pas exprimer une grandeur physique en fonction des paramètres physiques et des constantes fondamentales, alors l'insuffisance de la théorie utilisée est démontrée. C'est ainsi que les théories classiques se révélèrent incapables d'expliquer, au début du XX^e siècle, certains phénomènes tels que l'effet photoélectrique, le rayonnement du corps noir ou la stabilité des atomes constituant la matière.

2.2 Nécessité d'une théorie quantique : l'exemple de l'effet photoélectrique

L'effet photoélectrique mit en échec la physique classique de façon radicale.

Il consiste en l'émission d'électrons par un matériau, généralement métallique, lorsque celui-ci est exposé à la lumière ou à un rayonnement électromagnétique de fréquence suffisamment élevée (typiquement UV).

On savait dès la fin du XIX^e siècle qu'un rayonnement électromagnétique pouvait expulser des électrons hors des métaux.

Einstein montra expérimentalement que l'énergie cinétique des électrons dépendait linéairement de la pulsation ω du rayonnement et non de l'intensité du rayonnement incident. Il avança la formule :

$$E = \hbar\omega - W \quad (2.1)$$

où W est l'énergie d'extraction, caractéristique du métal et \hbar est une constante, qui ne dépend donc ni de l'intensité du rayonnement, ni du métal.

Si \hbar n'était pas une constante, cette quantité n'aurait pu s'exprimer qu'en fonction des paramètres et constantes mis en jeu : la charge q_e et la masse m_e de l'électron et la constante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Toutes les tentatives en ce sens échouèrent et il était alors clair que \hbar était une nouvelle constante fondamentale de la physique : la physique quantique était née.

La constante \hbar établit un lien entre deux concepts jusqu'alors décorrélés : énergie et pulsation. Le lien entre ces deux concepts respectivement corpusculaire et ondulatoire sera explicité au chapitre 5 (lois quantique : invariances et unification).

Sa valeur numérique est :

$$\hbar \simeq 1,06 \cdot 10^{-34} \text{ SI}$$

C'est en fait Planck qui l'introduisit dès 1900 dans l'étude du corps noir sous la forme $h = 2\pi\hbar$. Mais c'est bien \hbar la vraie constante de la physique quantique (cf chapitre 5).

2.3 Références pour le chapitre 2

[Le Bellac] et [Lévy-Leblond].

Chapitre 3

Le critère quantique

3.1 Unité de \hbar et premiers exemples d'invariances

La relation établie pour l'effet photoélectrique permet d'en déduire l'unité de \hbar dans le système MKS ($[\alpha]$ signifie unité de α) :

$$[\hbar] = ML^2T^{-1}$$

On a alors les relations suivantes :

$$[\hbar] = [\text{Energie}][\text{Temps}] = [\text{Quantité de mouvement}][\text{Longueur}]$$

Dans ces deux relations, surgissent une nouvelle fois les correspondances spatio-temporelles, bien connues en physique classique, qui associent les couples Energie/Temps et Quantité de mouvement/Longueur : la conservation de l'énergie est liée à l'invariance par translation dans le temps et la conservation de la quantité de mouvement est liée à l'invariance par translation dans l'espace. Je reparlerai de ces correspondances dès le chapitre 5.

Par analogie, on peut construire une troisième relation du type :

$$[\hbar] = [\text{Moment cinétique}][\text{Angle}]$$

Remarque : On baptise action toute grandeur de dimension ML^2T^{-1} . La terminologie vient de la mécanique classique où l'on appelle action une intégrale temporelle d'énergie ou une intégrale spatiale de quantité de mouvement.

\hbar est homogène à une action et c'est donc l'étalon naturel pour toute action d'un système quantique.

3.2 Le critère quantique

Le premier rôle de \hbar serait, en tant que constante fondamentale de la physique quantique, de délimiter le domaine d'application de celle-ci. C'est le rôle joué par la célérité de la lumière en relativité : si $v \ll c$ alors l'approximation classique est valable, sinon si $v \sim c$ alors on ne peut échapper à la relativité restreinte.

En tant qu'étalon d'action, le critère suivant semble naturel :

$$\boxed{\text{Action caractéristique} \sim \hbar \iff \text{Domaine de la physique quantique}}$$

Pour vérifier si un phénomène doit être décrit par la physique quantique, on doit - à l'aide des paramètres caractérisant le phénomène physique - former les quantités homogènes à une action et les comparer à \hbar . Si les actions caractéristiques sont de l'ordre de \hbar , il faut avoir recours à la physique quantique. Si par contre les actions caractéristiques ont des valeurs très supérieures à \hbar , alors l'approximation classique est suffisante.

Exemples :

(i) Une montre a des parties mobiles de longueur $d=10^{-4}$ m, de masse $m=10^{-4}$ kg et de temps caractéristique τ évidemment égal à une seconde. Alors l'action caractéristique A est de l'ordre de : $A = m \cdot d^2 \cdot \tau \simeq 10^{22} \hbar$.

La physique classique est suffisante pour expliquer le fonctionnement d'une montre !

(ii) Une antenne radio émet une puissance $P=1\text{kW}$ à une fréquence $f=1\text{MHz}$, soit à une pulsation $\omega \simeq 2 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$. Soit une action caractéristique : $A = P\omega^{-2} \simeq 3 \cdot 10^{23} \hbar$.

La physique classique est encore une fois suffisante !

(iii) Intéressons-nous à un atome d'hydrogène. On a une énergie $E=13.6 \text{ eV}$ et une longueur d'onde d'environ 10^3 \AA , soit une pulsation $\omega \simeq 2 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$. Soit donc une action caractéristique : $A = \frac{E}{\omega} \simeq 10^{-34} \text{ SI} \simeq \hbar$. Evidemment, la physique quantique est indispensable pour décrire l'atome d'hydrogène !

Remarque : La démarcation entre les domaines classique et quantique ne correspond donc pas toujours à la limite microscopique/macrosopique. Par exemple, le rayonnement du corps noir est un phénomène macroscopique qui s'explique uniquement par la théorie quantique.

3.3 Références pour le chapitre 3

[Le Bellac] et [Lévy-Leblond].

Chapitre 4

Ordres de grandeur en physique quantique

Une fois le critère quantique vérifié pour un phénomène quantique, en ayant comparé à \hbar les actions caractéristiques de celui-ci, il est possible de faire un pas de plus. L'analyse dimensionnelle permet d'explorer la théorie quantique en s'intéressant aux relations que celles-ci pourraient faire intervenir avec la nouvelle constante fondamentale \hbar . Voyons cela à travers deux exemples qui nous donneront des ordres de grandeur caractéristiques de la physique quantique.

4.1 L'atome d'hydrogène comme étalon quantique

Pour l'atome d'hydrogène, nous avons à disposition les quantités suivantes : \hbar , $q_e, \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ et les masses m et M de l'électron et du proton.

On va construire une nouvelle constante e :

$$e \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

Soit :

$$\boxed{[e^2] = ML^3T^{-2}}$$

e^2 mesure l'intensité de l'interaction entre deux charges élémentaires (électrons et protons) en unités purement mécaniques (système MKS).

Une théorie quantique de l'atome d'hydrogène devrait aussi faire intervenir - en plus de e - \hbar et les masses m et M de l'électron et du proton. En première approximation, on peut penser que le mouvement sera essentiellement celui de l'électron autour du proton (vu que $m \ll M$). On a donc accès finalement aux quantités suivantes : \hbar , e^2 et m . On va pouvoir construire - en les combinant judicieusement - une énergie, une longueur et une vitesse caractéristiques.

Une énergie caractéristique : l'énergie de Rydberg E_H

$$E_H \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^2} \simeq 13.6eV$$

Une longueur caractéristique : le rayon de Bohr a_0

$$a_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\hbar^2}{me^2} \simeq 0.53\text{\AA}$$

Une vitesse caractéristique : la vitesse typique de l'électron v_a

$$v_a \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{e^2}{\hbar} \simeq 2.10^6 m.s^{-1}$$

Remarque : La vitesse typique de l'électron v_a est 100 fois plus faible que la vitesse de la lumière. Le mouvement de l'électron peut donc s'expliquer sans avoir recours à la relativité restreinte, ce qui justifie a posteriori l'absence de c dans nos relations.

4.2 Ordres de grandeur en physique des particules

En physique des particules, on se place dans le cadre de la mécanique quantique relativiste : on a donc à la fois accès à \hbar et à c .

À toute particule de masse m , on peut associer :

- une énergie : mc^2
- une longueur : $\frac{\hbar}{mc}$
- un temps : $\frac{\hbar}{mc^2}$

Pour le méson π , l'une des plus légères particules fondamentales, on obtient les grandeurs suivantes, que l'on pourra considérer comme caractéristiques de la physique des particules :

- $m \simeq 3.10^{-28}$ kg
- $E \simeq 200$ meV
- $L \simeq 10^{-15}$ m
- $T \simeq 3.10^{-24}$ s

4.3 Références pour le chapitre 4

[Le Bellac] et [Lévy-Leblond].

Chapitre 5

Lois quantiques : invariances et unification

Je montrerai au chapitre 11 qu'en physique classique, on peut associer une grandeur conservée à chaque symétrie des lois physiques, c'est à dire que lorsque les lois de la physique sont invariantes par une transformation géométrique, il existe une intégrale première du mouvement. On se contentera ici d'exploiter les trois symétries suivantes et les quantités associées :

Symétrie spatio-temporelle	Grandeur dynamique conservée
Translation temporelle	Energie
Translation spatiale	Quantité de mouvement
Rotation	Moment cinétique

Je vais montrer comment les lois de Plack-Einstein, de Broglie et de quantification du moment cinétique (ou moment angulaire) sont des lois à la fois d'invariances et d'unification de concepts classiques, au sens où elles sont basées sur les invariances évoquées ci-dessus et qu'elles réunissent des concepts classiques duaux.

5.1 La loi de Planck-Einstein

L'hypothèse de Plack-Einstein (1900-1905) qui a permis de comprendre, entre autre, l'effet photoélectrique est la relation suivante :

$$E = \hbar\omega \quad (5.1)$$

Elle établit un lien entre une grandeur classique corpusculaire (l'énergie E) et un concept ondulatoire (la pulsation ω).

La relation de Planck-Einstein est une relation purement quantique car elle lie les concepts classiques d'énergie et de pulsation par la constante fondamentale de la théorie quantique. On forge un nouveau concept, proprement quantique, qui n'est ni ondulatoire, ni corpusculaire.

Interprétation en terme d'invariant : En mécanique classique, la conservation de l'énergie est associée à l'invariance par translation dans le temps des lois de la physique. Le concept de pulsation est associé en physique ondulatoire classique à l'harmonicité dans le temps.

Une onde harmonique $\Psi(t)$ est définie de sorte qu'une translation dans le temps se caractérise par un simple déphasage de son amplitude et ne modifie pas sa dépendance temporelle :

$$\Psi(t) = Ae^{i(\omega t + \phi_0)} \implies \Psi(t + \tau) = e^{i\omega\tau} \Psi(t)$$

C'est là une forme d'invariance singulière des ondes harmoniques, qui sont caractérisées par leur pulsation ω .

Bilan La relation de Planck-Einstein est entièrement dominée par le principe d'invariance des lois de la physique par translation dans le temps. Elle réalise une synthèse quantique, une unification, de deux concepts classiques duaux, énergie et pulsation, liés à l'invariance par translation dans le temps.

5.2 La loi de de Broglie-Einstein

La loi de de Broglie-Einstein est la relation suivante :

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \tag{5.2}$$

Elle établit un lien entre une grandeur classique corpusculaire (la quantité de mouvement \vec{p}) et un concept ondulatoire (le vecteur d'onde \vec{k}).

C'est également une relation purement quantique puisqu'elle lie les concepts classiques d'énergie et de pulsation par la constante fondamentale de la théorie quantique. On forge encore un nouveau concept, proprement quantique, qui n'est ni ondulatoire, ni corpusculaire.

Interprétation en terme d'invariant : En mécanique classique, la conservation de la quantité de mouvement est associée à l'invariance par translation dans l'espace des lois de la physique. En physique ondulatoire classique, l'harmonicité spatiale d'une onde est décrite par son vecteur d'onde.

Bilan La relation de de Broglie-Einstein est dominée par le principe d'invariance des lois de la physique par translation dans l'espace. Elle réalise une synthèse quantique, une unification, de deux concepts classiques duaux, quantité de mouvement et vecteur d'onde, liés à l'invariance par translation dans l'espace.

5.3 La quantification du moment cinétique

Le moment cinétique est la grandeur associée en mécanique classique à l'invariance par rotation dans l'espace : pour un phénomène invariant par rotation autour de l'axe O_z , c'est la composante J_z du moment cinétique qui est conservée.

Reste alors à définir son homologue ondulatoire : celui-ci doit caractériser l'harmonicité d'une onde classique par rotation autour de l'axe O_z .

Prenons une onde électro-magnétique dans un guide d'onde cylindrique, c'est à dire la combinaison de deux ondes progressives tournant dans des sens opposés :

$$F(r, \Phi, t) = f(r)[e^{i(\omega t - m\Phi)} + e^{i(\omega t + m\Phi)}]$$

Cette onde est périodique par rapport à Φ (angle autour de O_z) et son amplitude a un module

constant lors de la rotation autour de O_z (facteur de phase en $e^{i\phi}$).

Soit α la périodicité d'une telle onde harmonique. On lui associe un nombre d'onde angulaire m (que l'on pourrait appeler angulation), qui caractérise l'harmonicité par rotation autour de l'axe O_z :

$$m \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{2\pi}{\alpha}$$

On en déduit une troisième relation, analogue à celles de Planck-Einstein et de Broglie-Einstein :

$$J_z = \hbar m \tag{5.3}$$

Remarque : On a bien sûr les mêmes relations suivant les axes O_x et O_y .

Bilan On a retrouvé la loi bien connue de quantification du moment cinétique. Elle réalise une synthèse quantique, une unification, de deux concepts classiques duaux, moment cinétique et angulation, liés à l'invariance par rotation.

5.4 Un nouveau concept : le quanton

Les lois dont je viens de parler mettent en évidence l'unification de concepts classiques ondulatoires et corpusculaires liés aux mêmes invariances. Il faut maintenant abandonner l'idée que tout objet physique soit une onde *ou* une particule, ou même que les particules deviennent des ondes selon le phénomène, et vice-versa.

Les objets quantiques sont en fait un seul et même objet : le quanton. Son aspect essentiel est son unicité : il n'existe qu'un seul type d'objets physiques.

Ces quantons, dans certaines conditions (action caractéristique $\gg \hbar$), peuvent être approximativement décrits soit comme des ondes, soit comme des particules.

5.5 Références pour le chapitre 5

[Le Bellac] et [Lévy-Leblond].

Deuxième partie

La théorie de groupes : la symétrie en acte

Chapitre 6

Rappels sur les groupes

La théorie des groupes joue un rôle majeur en physique, et en particulier dans l'étude des symétries. Ce premier chapitre présente quelques définitions élémentaires et certains groupes notoires. Je termine par une introduction au concept d'action de groupe sur un ensemble, dont les applications en physique sont très nombreuses, ne serait-ce qu'à travers la théorie des représentations de groupes.

6.1 Principales définitions

6.1.1 Groupe et sous-groupe

Définition 1.1 : Groupe Un groupe $(G, *)$ est la donnée d'un ensemble G et d'une loi $*$ interne :

$$\begin{aligned} * : G \times G &\rightarrow G \\ (g, g') &\mapsto g * g' \end{aligned}$$

vérifiant :

- (i) $\exists! 1_G, \forall g \in G, 1_G * g = g = g * 1_G$
- (ii) $\forall g_1, g_2, g_3 \in G, g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$
- (iii) $\forall g \in G, \exists! g' \in G, g * g' = 1_G = g' * g$

Définition 1.2 : Sous-groupe Un sous-groupe $(H, *)$ d'un groupe $(G, *)$ est la donnée d'un ensemble $H \subset G$ tel que :

- (i) $1_G \in H$
- (ii) $\forall h_1, h_2 \in H, h_1 * h_2^{-1} \in H$

Définition 1.3 : Sous-groupe engendré Soit $(G, *)$ un groupe et A une partie quelconque de G . Le sous-groupe engendré par A , noté $\text{gr}(A)$, est par définition :

$$\text{gr}(A) \stackrel{\text{déf.}}{=} \bigcap_{H \text{ sous-groupe de } G \text{ contenant } A} H$$

6.1.2 Classes à gauche, classes à droite et théorème de Lagrange

Définition 1.4 : Classes à gauches Soit (H, \cdot) un sous-groupe de (G, \cdot) . Soit g dans G . La classe à gauche de g suivant H - notée gH - est par définition :

$$gH \stackrel{\text{déf.}}{=} \{g \cdot h / h \in H\}$$

L'ensemble des classes à gauche suivant H est l'ensemble quotient noté G/H .

Définition 1.5 : Classes à droites Soit (H, \cdot) un sous-groupe de (G, \cdot) . Soit g dans G . La classe à droite de g suivant H - notée Hg - est par définition :

$$Hg \stackrel{\text{déf.}}{=} \{h \cdot g / h \in H\}$$

L'ensemble des classes à droite suivant H est l'ensemble quotient noté $H \backslash G$.

Théorème 1.6 : Théorème de Lagrange Soit (G, \cdot) un groupe fini. On note $|G|$ le cardinal de G (ie le nombre d'éléments de G). Soit (H, \cdot) un sous-groupe de (G, \cdot) . Alors le cardinal de H divise le cardinal de G et plus précisément :

$$|G|/|H|=|H \backslash G|=|G/H|$$

La démonstration de ce théorème sera faite dans la section III de ce chapitre.

6.1.3 Morphismes de groupes, conjugaison et sous-groupe invariant

Définition 1.7 : Morphismes de groupes Soient (G, \cdot) et $(G', *)$ deux groupes. Un morphisme de groupes de G sur G' est une application f de G vers G' telle que :

$$\forall g, g' \in G, f(g \cdot g') = f(g) * f(g')$$

Conséquences :

$$\begin{array}{l} \text{(i) } f(1_G) = 1_{G'} \\ \text{(ii) } (f(g))^{-1} = f(g^{-1}) \end{array}$$

On définit alors la notion d'isomorphisme (morphisme bijectif) et d'automorphisme (isomorphisme avec $G=G'$).

Définition 1.8 : Conjugaison La conjugaison \mathcal{C}_g est un automorphisme sur le groupe (G, \cdot) défini par :

$$\begin{array}{l} \mathcal{C}_g : G \rightarrow G \\ h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1} \end{array}$$

Définition 1.9 : Sous-groupe normal ou invariant Soit (G, \cdot) un groupe et H un sous-groupe de G .

H est dit normal dans G si et seulement si H est stable par conjugaison (ie $C_g(H) \subset H$).

Exemples :

- (i) Les sous-groupes d'un groupe abélien.
- (ii) Les noyaux des morphismes de groupes.
- (iii) Le centre de G noté $Zer(G)$ et défini par :

$$Zer(G) \stackrel{def.}{=} \{g \in G / \forall h \in G, g.h = h.g\}$$

c'est à dire les éléments de G qui commutent avec tous les autres.

6.2 Groupes notoires

6.2.1 Groupes de nombres

Proposition 2.1 : Groupes additifs $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe.
 $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Z}, +)$ en sont des sous-groupes.

Proposition 2.2 : Groupes multiplicatifs (\mathbb{C}^*, \cdot) est un groupe.
 (\mathbb{R}^*, \cdot) , (\mathbb{Q}^*, \cdot) , (S^1, \cdot) et (\mathcal{R}_n, \cdot) en sont des sous-groupes.

6.2.2 Groupes de transformations

Définition 2.3 : Le groupe σ_X Soit X un ensemble quelconque. On définit le groupe σ_X comme le groupe des bijections de X dans X .

Définition 2.4 : Le groupe symétrique σ_n On considère ici σ_X avec X un ensemble discret à n éléments. On a alors immédiatement plusieurs propriétés pertinentes :

- (i) $|\sigma_n| = n!$
- (ii) Soit :

$$\Psi : (\sigma_n, \circ) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \cdot)$$

$$\sigma \mapsto (-1)^N$$

où N est le nombre de transpositions dans la décomposition de σ en produit de transpositions.
 Ψ est un morphisme de groupes et $\text{Ker}(\Psi)$ est normal dans σ_n .

6.2.3 Groupes matriciels

On note \mathbb{K} indifféremment pour \mathbb{R} ou pour \mathbb{C} .

Proposition 2.5 : Groupes des matrices carrées de taille n Les matrices carrées de taille n sur le corps \mathbb{K} forment un groupe pour l'addition des matrices : $(\mathcal{M}(n, \mathbb{K}), +)$ est un groupe.

Proposition 2.5 : Groupes linéaire de taille n On note :

$$\mathcal{GL}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) / \det(X) \neq 0\}$$

$(\mathcal{GL}(n, \mathbb{K}), \cdot)$ est un groupe.

Proposition 2.6 : Sous-groupes de $(\mathcal{GL}(n, \mathbb{R}), \cdot)$

$\mathcal{SL}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{R}) / \det(X) = 1\}$ groupe spécial linéaire réel de taille n

$\mathcal{O}(n) = \{X \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{R}) / {}^t_X X = I\}$ groupe orthogonal de taille n

$\mathcal{SO}(n) = \{X \in \mathcal{O}(n) / \det(X) = 1\}$ groupe spécial orthogonal de taille n

$\mathcal{O}(p, q) = \{X \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{R}) / X J_{pq} {}^t_X = J_{pq}\}$ groupe orthogonal de taille (p, q)

$\mathcal{SO}(p, q) = \{X \in \mathcal{O}(p, q) / \det(X) = 1\}$ groupe spécial orthogonal de taille (p, q)

La matrice J_{pq} est une matrice diagonale avec p fois 1 suivis de q fois -1 sur la diagonale. Pour $p=3$ et $q=-1$, on obtient le tenseur métrique et alors $\mathcal{O}(3,1)$ est le groupe de Lorentz (isométries de l'espace de Minkowski).

Proposition 2.7 : Sous-groupes de $(\mathcal{GL}(n, \mathbb{C}), \cdot)$

$\mathcal{SL}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{C}) / \det(X) = 1\}$ groupe spécial linéaire complexe de taille n

$\mathcal{U}(n) = \{X \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{C}) / {}^t_{\bar{X}} X = I\}$ groupe unitaire de taille n

$\mathcal{SU}(n) = \{X \in \mathcal{U}(n) / \det(X) = 1\}$ groupe spécial unitaire de taille n

$\mathcal{Sp}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathcal{SL}(2n, \mathbb{C}) / {}^t_X J X = J\}$ groupe symplectique

$\mathcal{Sp}(n) = \mathcal{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{U}(2n)$ groupe symplectique

avec :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

6.3 Le concept fondamental de "groupe opérant sur un ensemble"

Soit un groupe (G, \cdot) et un ensemble M non vide. L'action du groupe G sur l'ensemble M peut être envisagée selon deux points de vue.

Point de vue 1 : On se donne une application $*$:

$$\begin{aligned} * &: G \times M \rightarrow M \\ (g, m) &\mapsto g * m \end{aligned}$$

telle que :

- (i) $\forall g, g' \in G, \forall m \in M, g'*(g*m) = (g'.g)*m$
- (ii) $\forall m \in M, 1_G * m = m.$

On dit que G agit à gauche sur M par $*$.

Point de vue 2 : L'action de G sur M par $*$ peut être vue comme la donnée d'un morphisme de groupe α de (G, \cdot) dans (σ_M, \circ) :

$$\begin{aligned} \alpha &: (G, \cdot) \rightarrow (\sigma_M, \circ) \\ g &\mapsto \alpha(g) : M \rightarrow M \\ m &\mapsto \alpha(g)(m) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} g * m \end{aligned}$$

Les conditions (i) et (ii) du point de vue 1 assurent que α est un morphisme.

Je vais développer dans cette partie le langage de l'action de groupes et l'illustrer par quelques exemples.

6.3.1 Le langage

Quelques définitions et propriétés

Proposition 3.1 : On définit sur M une relation d'équivalence en posant :

$$x \mathcal{R} y \iff \exists g \in G, y = g * x$$

Moralité : Deux éléments de M sont équivalents lorsqu'ils sont égaux à l'action près d'un élément du groupe.

Preuve : Montrons qu'il y a bien réflexivité, symétrie et transitivité.

R $\forall x \in M, x = 1_G * x.$

S Si $x \mathcal{R} y$ alors : $\exists g \in G, y = g * x.$

Donc : $g^{-1} * y = g^{-1} * (g * x) = (g^{-1}.g) * x = x.$

On a bien alors : $y \mathcal{R} x.$

T Si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$ alors : $\exists g, g' \in G, y = g * x, z = g' * y.$

Donc : $z = g' * g * x = (g'.g) * x.$

D'où : $x \mathcal{R} z.$

Définition 3.2 : Orbite Soit x dans M . L'orbite de x , notée \mathcal{O}_x , est par définition :

$$\mathcal{O}_x \stackrel{\text{déf.}}{=} \{g * x / g \in G\}$$

Définition 3.3 : Sous-groupe d'isotropie Soit x dans M . Le sous-groupe d'isotropie de x , noté \mathcal{G}_x , est par définition :

$$\mathcal{G}_x \stackrel{\text{déf.}}{=} \{g \in G / g * x = x\}$$

Moralement : Le sous-groupe d'isotropie de x , appelé parfois aussi stabilisateur de x , est le groupe des symétries locales de x . Nous allons vérifier que c'est bien un groupe.

Proposition 3.4 : \mathcal{G}_x est un sous-groupe de G .

Preuve :

D'une part : $1_G \in \mathcal{G}_x$ ($1_G * x = x$).

D'autre part si h_1 et h_2 sont dans \mathcal{G}_x alors :

$$(h_1^{-1} \cdot h_2) * x = h_1^{-1} * (h_2 * x) = h_1^{-1} * x = x.$$

Donc $h_1^{-1} \cdot h_2 \in \mathcal{G}_x$.

Proposition 3.5 : $\exists g \in G, y = g * x \implies \mathcal{G}_y = g \cdot \mathcal{G}_x \cdot g^{-1}$

Moralement : Le long d'une même orbite, les sous-groupes d'isotropie sont conjugués.

Preuve :

$$\begin{aligned} & h' \in \mathcal{G}_y \\ \iff & h' * y = y = h' * (g * x) \\ \iff & (h' \cdot g) * x = g * x \\ \iff & (g^{-1} \cdot h' \cdot g) * x = x \\ \iff & \exists h \in \mathcal{G}_x, h = g^{-1} \cdot h' \cdot g \\ \iff & \exists h \in \mathcal{G}_x, h' = g \cdot h \cdot g^{-1} \end{aligned}$$

Cas des groupes finis

On s'intéresse ici uniquement à des groupes d'ordre fini.
Soit x fixé dans M , et y dans \mathcal{O}_x , c'est à dire :

$$\exists g_0 \in G, y = g_0 * x.$$

On note \mathcal{P}_x le paramétrage de \mathcal{O}_x défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x : G &\rightarrow \mathcal{O}_x \\ g &\mapsto g * x \end{aligned}$$

Proposition 3.6 :

$$\{g \in G / g * x = y\} = g_0 \cdot \mathcal{G}_x$$

Preuve :

$$\begin{aligned} g * x &= y \\ \iff g * x &= g_0 * x \\ \iff (g_0^{-1} \cdot g) * x &= x \\ \iff \exists h \in \mathcal{G}_x, g_0^{-1} \cdot g &= h \\ \iff \exists h \in \mathcal{G}_x, g &= g_0 \cdot h \end{aligned}$$

Proposition 3.7 :

$$G = \bigsqcup_{y \in \mathcal{O}_x} \{g \in G / g * x = y\}$$

Preuve :

On considère le paramétrage \mathcal{P}_x de \mathcal{O}_x . Le résultat recherché s'obtient alors directement :

$$G = \bigsqcup \text{fibres de } \mathcal{P}_x = \bigsqcup_{y \in \mathcal{O}_x} \{g \in G / g * x = y\}$$

Proposition 3.8 :

$$|G| = |\mathcal{G}_x| |\mathcal{O}_x|$$

Moralité : Le cardinal de chaque orbite divise le cardinal du groupe fini qui opère.

Preuve :

On a :

$$|G| = \left| \bigsqcup_{y \in \mathcal{O}_x} \{g \in G / g * x = y\} \right|$$

Via la propriété 3.6 on en déduit que :

$$|G| = \sum_{y \in \mathcal{O}_x} |g_0 \cdot \mathcal{G}_x| = \sum_{y \in \mathcal{O}_x} |\mathcal{G}_x| = |\mathcal{G}_x| |\mathcal{O}_x|$$

6.3.2 Illustrations

Action par translation

Soit (H, \cdot) un sous-groupe de (G, \cdot) . On définit une action de H sur G en posant (vérification laissée au lecteur) :

$$\begin{aligned} * : H \times G &\rightarrow G \\ (h, g) &\mapsto h * g \stackrel{\text{déf.}}{=} h.g \end{aligned}$$

On dit que H opère par translation à gauche.

Proposition 3.9 : Orbite et sous-groupe d'isotropie

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_g &\stackrel{\text{déf.}}{=} \{h * g / h \in H\} = H.g \\ \mathcal{H}_g &\stackrel{\text{déf.}}{=} \{h \in H / h * g = g \in G\} = \{1_G\} \end{aligned}$$

Proposition 3.10 : Théorème de Cayley Tout groupe (G, \cdot) est isomorphe à un sous-groupe de (σ_G, \circ) .

Moralité : Tous les groupes sont des groupes de transformations géométriques.

Preuve : Considérons :

$$\begin{aligned} \gamma : (G, \cdot) &\rightarrow (\sigma_G, \circ) \\ g &\mapsto \gamma(g) : G \rightarrow G \\ h &\mapsto \gamma(g)(h) \stackrel{\text{déf.}}{=} g.h \end{aligned}$$

Vérifions que γ est un morphisme injectif de (G, \cdot) dans (σ_G, \circ) .

Morphisme

$$\forall h \in G, \gamma(g.g')(h) \stackrel{\text{déf.}}{=} (g.g').h = \gamma(g) \circ \gamma(g')(h)$$

Injectivité

$$\text{Ker}(\gamma) = \{g \in G / \forall h \in G, \gamma(g)(h) = h = g.h\} = \{1_G\}$$

En restreignant γ au but à son image, sous-groupe de (σ_G, \circ) , on obtient le résultat.

Je propose ci-dessous une démonstration du théorème de Lagrange évoqué plus haut.

Proposition 3.11 : Théorème de Lagrange Soit un groupe (G, \cdot) fini. Alors le cardinal de chaque sous-groupe de G divise le cardinal de G .

Preuve : Soit H un sous-groupe de G . Faisons-le agir par translation sur G . On a :

$$G = \bigsqcup_{\text{nombre d'orbites}} \mathcal{O}_g$$

Soit :

$$|G| = \sum_{\text{nombre d'orbites}} |\mathcal{O}_g| = (\text{nombre d'orbites}) \cdot |\mathcal{O}_g|$$

Or d'après la proposition 3.8 :

$$|H| = |\mathcal{O}_g| \cdot |\mathcal{H}_g|$$

Et vu que d'après la proposition 3.9 :

$$|\mathcal{H}_g| = 1$$

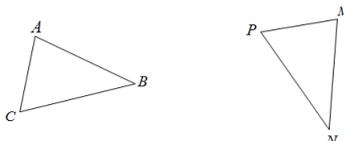
On a finalement :

$$|G| = |H| \cdot (\text{nombre d'orbites})$$

Remarque : En remarquant que \mathcal{O}_g pour l'action par translation est précisément (proposition 3.9) la classe à droite suivant H , et que pour la translation à droite c'est la classe à gauche suivant H , on retrouve le théorème de Lagrange tel que je l'avais énoncé précédemment :

$$|G|/|H| = |H \backslash G| = |G/H|$$

Lien avec les géométries



On a envie de dire que ces deux figures \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont égales au sens où elles sont superposables, à l'action près d'une transformation géométrique. On aimerait pour cela donner un sens à l'équivalence suivante :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}' \iff \exists f, f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$$

On se heurte alors à deux questions.

D'une part, quel est l'espace de notre géométrie ? Si on choisit le plan usuel euclidien, on se dirige vers la géométrie euclidienne (\mathbb{E}, d) . Si on choisit la sphère, on arrive dans le cadre de la géométrie elliptique (\mathbb{S}^2, d) . Enfin, si on choisit le demi-plan de Poincaré, on aura affaire à la géométrie hyperbolique (\mathbb{H}, d) .

D'autre part, quelles transformations f s'autorise-t-on ? On peut très bien choisir les isométries euclidiennes, les similitudes directes ou indirectes, les homographies... Et ce choix sera évidemment lié au choix de notre géométrie.

Finalement, il faut comprendre que le fameux problème des figures amène naturellement :

- (i) à la définition formelle des (sous-)groupes ;
- (ii) à la considération de diverses géométries liées au choix du groupe de ses transformations ;
- (iii) et au concept fondamental d'invariant sous l'action de G (distance, angle orienté, birrapport...).

Je vais maintenant donner des exemples d'actions de groupes qui vont faire le lien direct entre groupes et géométrie.

Action d'un groupe G sur un ensemble X quelconque, où G est un sous-groupe de σ_X

On définit une action de groupe en posant (vérification laissée au lecteur) :

$$\begin{aligned} * : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g * x \stackrel{\text{déf.}}{=} g(x) \end{aligned}$$

Action d'un groupe G sur $\mathcal{P}(X)$, où G est un sous-groupe de σ_X

On définit une action de groupe en posant (vérification laissée au lecteur) :

$$\begin{aligned} * : G \times \mathcal{P}(X) &\rightarrow \mathcal{P}(X) \\ (g, \mathcal{F}) &\mapsto g * \mathcal{F} \end{aligned}$$

où :

$$g * \mathcal{F} \stackrel{\text{not.}}{=} g(\mathcal{F}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \{g(x)/x \in \mathcal{F}\}$$

\mathcal{F} est moralement une figure dessinée dans X . Dans ce cadre, on peut donner un sens à l'égalité entre les figures (ou au sens moderne une relation d'équivalence) évoquée plus haut en posant :

$$\mathcal{F} \mathcal{R} \mathcal{F}' \iff \exists g \in G, g(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$$

6.4 Références pour le chapitre 6

[Kosmann-Schwarzbach], [Alessandri] et [Alessandri 2].

Chapitre 7

Groupes et algèbres de Lie

Les groupes de Lie sont des groupes de transformations très intéressants en physique. Leur définition formelle fait intervenir la notion de variété différentielle : pour ma part, je me contenterai d'étudier les groupes de Lie linéaire, sous-groupes fermés de $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$. On notera \mathbb{K} indifféremment pour \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

7.1 Algèbres de Lie

7.1.1 Définition et exemples

Définition 1.1 : Algèbre de Lie Une algèbre de Lie \mathfrak{a} sur \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension quelconque, muni d'une opération $[\ , \]$ bilinéaire, antisymétrique et vérifiant l'identité dite de Jacobi :

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{a}, \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Remarque : L'opération $[\ , \]$ est appelée crochet de Lie.

Exemples :

- (i) (\mathbb{R}^3, \wedge) est une algèbre de Lie réelle.
- (ii) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension quelconque. On définit sur $\mathcal{L}(E, E)$ un crochet de Lie par :

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E, E), [u, v] = uov - vov$$

Alors $(\mathcal{L}(E, E), [\ , \])$ est une algèbre de Lie sur \mathbb{K} .

- (iii) On définit sur $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ un crochet de Lie par :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}), [X, Y] = XY - YX$$

Alors $(\mathcal{M}(n, \mathbb{K}), [\ , \])$ est une algèbre de Lie sur \mathbb{K} , notée $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Définition 1.2 : Dimension d'une algèbre de Lie La dimension d'une algèbre de Lie \mathfrak{a} sur \mathbb{K} est par définition la dimension du \mathbb{K} -espace vectoriel.

Définition 1.3 : Sous-algèbre de Lie Une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie est un sous-espace vectoriel stable par le crochet de Lie.

Exemples : On s'intéresse ici à des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. On va montrer à chaque fois que si X et Y sont dans l'ensemble considéré alors $[X, Y]$ l'est aussi.

(i) L'ensemble des matrices réelles ou complexes de trace nulle :

$$\{X \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) / \text{tr}(X) = 0\}$$

forme une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

En effet :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) / \text{tr}(X) = \text{tr}(Y) = 0, \quad \text{tr}([X, Y]) = \text{tr}(XY - YX) = 0.$$

(ii) Les matrices antisymétriques :

$$\{X \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) / t_X = -X\}$$

forment une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

En effet :

$$\begin{aligned} \forall X, Y \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) / t_X = -X, t_Y = -Y, \\ t_{[X, Y]} = t_{XY - YX} = t_{XY} - t_{YX} = t_Y t_X - t_X t_Y = YX - XY = -[X, Y]. \end{aligned}$$

(iii) Les matrices antihermitiennes :

$$\{X \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) / t_{\bar{X}} = -X\}$$

forment une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ (vérification laissée au lecteur).

(iv) Le centre de l'algèbre de Lie \mathfrak{a} :

$$\text{Zer}(\mathfrak{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in \mathfrak{a} / \forall Y \in \mathfrak{a}, [X, Y] = 0\}$$

forme une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

En effet d'après l'identité de Jacobi :

$$\forall X, Y \in \text{Zer}(\mathfrak{a}), \forall Z \in \mathfrak{a}, [[X, Y], Z] = [0, Z] = 0.$$

7.1.2 Morphismes d'algèbres de Lie

Définition 1.4 : Morphisme d'algèbres de Lie Soient \mathfrak{a} et \mathfrak{b} deux algèbres de Lie sur \mathbb{K} . Un morphisme de \mathfrak{a} dans \mathfrak{b} est une application \mathbb{K} -linéaire Ψ de \mathfrak{a} vers \mathfrak{b} telle que :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{a}, [\Psi(X), \Psi(Y)] = \Psi([X, Y])$$

Remarque : On définit alors la notion d'isomorphisme d'algèbres de Lie : morphisme d'algèbres de Lie bijectif.

7.1.3 Relations de commutation et constantes de structure

Soit \mathfrak{a} une algèbre de Lie sur \mathbb{K} de dimension finie n .
Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de \mathfrak{a} .

Définition 1.5 : Relations de commutation et constantes de structure On appelle relations de commutation la donnée des crochets de Lie $([e_i, e_j])_{1 \leq i < j \leq n}$.
Les constantes, réelles ou complexes, qui interviennent sont appelées constantes de structure et notées C_{ij}^k , c'est à dire :

$$\forall i, j, 1 \leq i < j \leq n, [e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k \cdot e_k$$

Proposition 1.6 : Soient \mathfrak{a} et \mathfrak{b} deux algèbres de Lie de dimension finie n .

Soient $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ leurs bases respectives.

Si les constantes de structures sont les mêmes dans les deux bases alors $e_i \mapsto f_i$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Preuve : Appelons Φ l'application de \mathfrak{a} vers \mathfrak{b} , définie par l'image des vecteurs de base $(e_i \mapsto f_i)$.
Le caractère bijectif est évident (transforme une base en une base). Montrons que c'est bien un morphisme d'algèbres de Lie.

Soit X et Y quelconques dans \mathfrak{a} , on peut écrire :

$$X = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k$$

$$Y = \sum_{k=1}^n \delta_k \cdot e_k$$

Alors :

$$\begin{aligned} [\Phi(X), \Phi(Y)] &= [\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \Phi(e_k), \sum_{l=1}^n \delta_l \cdot \Phi(e_l)] \\ \implies [\Phi(X), \Phi(Y)] &= [\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot f_k, \sum_{l=1}^n \delta_l \cdot f_l] \\ \implies [\Phi(X), \Phi(Y)] &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_k \delta_l \cdot [f_k, f_l] \\ \implies [\Phi(X), \Phi(Y)] &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_k \delta_l \cdot (\sum_{p=1}^n C_{kl}^p \cdot f_p) \\ \implies [\Phi(X), \Phi(Y)] &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n \lambda_k \delta_l C_{kl}^p \cdot \Phi(e_p) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \Phi([X, Y]) &= \Phi([\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k, \sum_{l=1}^n \delta_l \cdot e_l]) \\ \implies \Phi([X, Y]) &= \Phi(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_k \delta_l \cdot [e_k, e_l]) \\ \implies \Phi([X, Y]) &= \Phi(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n \lambda_k \delta_l C_{kl}^p \cdot e_p) \\ \implies \Phi([X, Y]) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n \lambda_k \delta_l C_{kl}^p \cdot \Phi(e_p) \end{aligned}$$

Donc :

$$[\Phi(X), \Phi(Y)] = \Phi([X, Y])$$

Φ est bien un isomorphisme de \mathfrak{a} vers \mathfrak{b} .

7.1.4 Formes réelles d'une algèbre de Lie

Toute algèbre de Lie complexe \mathfrak{a} peut être considérée comme une algèbre de Lie réelle de dimension double, notée $\mathfrak{a}^{\mathbb{R}}$.

D'autre part, toute algèbre de Lie réelle \mathfrak{b} peut être complexifiée en posant :

$$\mathfrak{b}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{b} \oplus i\mathfrak{b}$$

Définition 1.7 : Forme réelle Une forme réelle d'une algèbre de Lie complexe \mathfrak{g} est une algèbre de Lie réelle \mathfrak{a} telle que :

$$\mathfrak{a}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{a} \oplus i\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$$

7.1.5 Représentations d'algèbres de Lie

Définition 1.8 : Représentation d'algèbres de Lie Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur \mathbb{K} . On appelle représentation de \mathfrak{g} dans E , la donnée d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E et d'une application linéaire ρ de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{gl}(E)$ (algèbre de Lie de $\mathcal{GL}(E)$) telle que :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, [\rho(X), \rho(Y)] = \rho([X, Y])$$

Moralité : Une représentation de \mathfrak{g} dans E est un morphisme d'algèbres de Lie, de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{gl}(E)$.

Remarque :

- (i) Une représentation est donc la donnée du couple (E, ρ)
- (ii) On a défini ici la représentation d'une algèbre de Lie sur \mathbb{K} dans $\mathfrak{gl}(E)$, où E est un \mathbb{K} -espace vectoriel.
- (iii) On peut définir la représentation d'une algèbre de Lie sur \mathbb{R} dans $\mathfrak{gl}(E)$, où E est un \mathbb{C} -espace vectoriel par :

$$\rho : \mathfrak{g} \mapsto (\mathfrak{gl}(E))^{\mathbb{R}}$$

- (iv) Ce morphisme a une unique extension complexe $\tilde{\rho}$:

$$\tilde{\rho} : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mapsto \mathfrak{gl}(E)$$

Définition 1.9 : Des représentations (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) d'une algèbre de Lie \mathfrak{a} sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme T de E_1 vers E_2 tel que :

$$\forall X \in \mathfrak{a}, \rho_1(X) \circ T = T \circ \rho_2(X)$$

7.2 L'application exponentielle

Définition 2.1 : Exponentielle matricielle Lorsque l'on munit $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, c'est à dire $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, de la norme des applications linéaires (on est en dimension finie), la série :

$$\exp(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$$

pour X dans $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, converge normalement et uniformément sur tout compact. C'est par définition l'exponentielle de X .

Proposition 2.2 : Premières propriétés

- (i) $\exp 0 = \text{Id}$
- (ii) $\forall s, t \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), \exp(s+t)X = \exp(sX)\exp(tX)$
- (iii) $\forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), XY = YX \implies \exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$
- (iv) $\forall X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), \exp(X) \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$. Et :

$$(\exp(X))^{-1} = \exp(-X)$$

Moralité : \exp est une application de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ vers $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Preuve :

(i)

$$\exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \text{Id}$$

(ii)

$\forall s, t \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}),$

$$\exp(sX)\exp(tX) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k X^k}{k!}\right) \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p X^p}{p!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{s^k X^k}{k!} \frac{t^{n-k} X^{n-k}}{(n-k)!}\right)$$

$$\implies \exp(sX)\exp(tX) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s+t)^n X^n}{n!}$$

(iii)

$\forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}),$

$$\exp(X)\exp(Y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}\right) \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{Y^p}{p!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{X^k Y^{n-k}}{k!(n-k)!}\right)$$

$$\implies \exp(X)\exp(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(X+Y)^n}{n!}$$

(iv) D'après la propriété (i) :

$$\forall X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), \exp(1-1)X = \text{Id}$$

Mais d'après la (ii) :

$$\forall X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), \exp(1-1)X = \exp(X)\exp(-X) = \exp(-X)\exp(X)$$

D'où le résultat puisqu'alors :

$$\forall X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), \text{Id} = \exp(X)\exp(-X) = \exp(-X)\exp(X)$$

Lemme 2.3 : Soit X une matrice de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Notons Γ_X l'application :

$$\begin{aligned}\Gamma_X : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{GL}(n, \mathbb{K}) \\ t &\mapsto \Gamma_X(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \exp(tX)\end{aligned}$$

Γ_X est dérivable et :

$$\frac{d}{dt}\Gamma_X(t) = X\exp(tX) = \exp(tX)X$$

Preuve : La dérivation terme à terme de la série $\exp(tX)$ est licite et donne :

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!} = X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} X^{n-1}}{(n-1)!} = X\exp(tX)$$

De même :

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} X^{n-1}}{(n-1)!} X = \exp(tX)X$$

En particulier :

$$\Gamma'_X(0) = X$$

Proposition 2.4 : L'application exponentielle est C^∞ et sa différentielle à l'origine est $\text{Id}_{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})}$.

Preuve :

$$\exp(X) = \exp(0) + X + X \cdot \sum_{p=2}^{\infty} \frac{X^{p-1}}{p!}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\| \exp(X) - \exp(0) - X \| &\leq \| X \| \cdot \left\| \sum_{p=2}^{\infty} \frac{X^{p-1}}{p!} \right\| \\ \implies \| \exp(X) - \exp(0) - X \| &\leq \| X \|^2 \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\| X^q \|}{(q-2)!}\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{\| X^q \|}{(q-2)!} \xrightarrow{\|X\| \rightarrow 0} 0$$

Donc :

$$\exp(X) = \exp(0) + \text{Id}_{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})}(X) + o(X)$$

Finalemment \exp est bien différentiable en 0 de différentielle en 0 $\text{Id}_{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})}$.

On admet que \exp est différentiable en tout point et même C^∞ .

Corollaire 2.5 : Il existe un voisinage U_0 de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, et un voisinage V_0 de l'identité dans $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$ tels que \exp soit un difféomorphisme de U_0 sur V_0 .

On appelle logarithme le difféomorphisme inverse défini au voisinage de l'identité dans $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$:

$$\forall X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), \|X\| < 1, \log(\text{Id} + X) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{X^{p+1}}{p!}$$

Preuve : D'après le théorème d'inversion locale, $d_{\exp}(0) = \text{Id}_{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})}$, donc on peut inverser \exp dans un voisinage de 0.

Proposition 2.6 :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), \exp(tX)\exp(tY) = \exp(t(X + Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + O(t^3))$$

Preuve : On considère la fonction u , avec X et Y fixés dans $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \\ t &\mapsto u(t) = \log(\exp(tX)\exp(tY)) \end{aligned}$$

Pour t proche de 0, on développe les exponentielles :

$$u(t) = \log\left(\left(\text{Id} + tX + \frac{t^2 X^2}{2} + O(t^3)\right)\left(\text{Id} + tY + \frac{t^2 Y^2}{2} + O(t^3)\right)\right)$$

En développant, et ne gardant que les termes d'ordre 2 on trouve :

$$u(t) = \log\left(\text{Id} + t(X + Y) + \frac{t^2}{2}(X^2 + Y^2 + 2XY) + O(t^3)\right)$$

On développe maintenant les logarithmes pour t proche de 0 :

$$u(t) = t(X + Y) + \frac{t^2}{2}(X^2 + Y^2 + 2XY) - \frac{t^2}{2}(X + Y)^2 + O(t^3)$$

Soit :

$$u(t) = t(X + Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + O(t^3)$$

Il suffit alors de prendre l'exponentielle des deux membres pour conclure.

Corollaire 2.7 :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), \exp(X + Y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\exp\left(\frac{X}{k}\right)\exp\left(\frac{Y}{k}\right)\right)^k$$

Preuve : D'après la proposition 2.6 :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), \left(\exp\left(\frac{X}{k}\right)\exp\left(\frac{Y}{k}\right)\right)^k = \left(\exp\left(\frac{1}{k}(X + Y) + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right)^k$$

D'où :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), \left(\exp\left(\frac{X}{k}\right)\exp\left(\frac{Y}{k}\right)\right)^k = \exp\left(X + Y + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

Le résultat s'obtient alors par passage à la limite.

Proposition 2.8 :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), e^{\text{tr}(X)} = \det(\exp X)$$

Preuve : Sur \mathbb{C} , on triangularise X : X est ainsi semblable à une matrice triangulaire T , de coefficients diagonaux que l'on note $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On vérifie immédiatement que si X est semblable à une matrice triangulaire T alors $\exp(X)$ est semblable à $\exp(T)$, et que les coefficients diagonaux de $\exp(T)$ sont les $(e^{a_i})_{1 \leq i \leq n}$. Ainsi :

$$\forall X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), \det(\exp X) = \prod_{i=1}^n e^{a_i} = e^{\sum_{i=1}^n a_i} = e^{\text{tr}(X)}$$

Corollaire 2.9 : L'exponentielle d'une matrice de trace nulle est une matrice de déterminant 1.

7.3 Sous-groupe à un paramètre

Définition 3.1 : Sous-groupe à un paramètre Un sous-groupe à un paramètre d'un groupe topologique (G, \cdot) est une application f continue de \mathbb{R} dans G telle que :

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, f(t+s) = f(t) \cdot f(s)$$

D'où :

$$f(0) = 1_G$$

Lemme 3.2 Soit M une matrice quelconque de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

$$\|M - \text{Id}\| \leq 1 \implies M \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$$

Preuve :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(M - \text{Id}), |\lambda| \leq \|M - \text{Id}\| < 1$$

Or :

$$\text{Sp}(M - \text{Id}) = \text{Sp}(M) - 1$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \text{Sp}(M), \quad 0 < |\alpha - 1| \leq |\alpha - 1| < 1 \\ \implies |\alpha| > 0 \\ \implies \det(M) = \prod \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

Propriété 3.3 : Soit f un sous-groupe à un paramètre de $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$. Alors f est dérivable.

Preuve : Soit a dans \mathbb{R}_+^* . Comme f est continue, $\int_0^a f(t)dt$ existe. Or :

$$\int_s^{s+a} f(t)dt = \int_0^a f(t+s)dt = f(s) \int_0^a f(t)dt$$

Si on montre que $\int_0^a f(t)dt$ est inversible alors f serait dérivable puisqu'alors on aurait :

$$f(s) = \underbrace{\int_s^{s+a} f(t)dt}_{\text{dérivable par rapport à } s} \cdot \underbrace{\left(\int_0^a f(t)dt\right)^{-1}}_{\text{indépendant de } s}$$

Or f est continue en 0 et $f(0) = \text{Id}$ donc :

$$\begin{aligned} \exists a > 0, \forall t \in \mathbb{R} / |t| > a, \|f(t) - \text{Id}\| \leq \frac{1}{2} \\ \implies \left\| \int_0^a (f(t) - \text{Id})dt \right\| \leq \int_0^a \|f(t) - \text{Id}\| dt \leq \frac{a}{2} \\ \implies \left\| \frac{1}{a} \left(\int_0^a f(t)dt\right) - \text{Id} \right\| \leq \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

Donc via le lemme 3.2, $\frac{1}{a} \left(\int_0^a f(t)dt\right)$ est inversible et donc $\int_0^a f(t)dt$ est bien inversible.

Propriété 3.4 : Soit f un sous-groupe à un paramètre de $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$.

Alors :

$$\exists! X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \exp(tX)$$

Moralité : Les sous-groupes à un paramètre de $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$ sont les $t \mapsto \exp(tX)$ pour X dans $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Preuve :

Unicité Si X existe alors via le lemme 2.3 :

$$\left. \frac{d}{dt} f(t) \right|_{t=0} = X$$

On conclue par unicité de la dérivée.

Existence

$$\frac{d}{dt} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(t+s) - f(t)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} f(t) \frac{f(s) - Id}{s} = f(t) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s) - f(0)}{s}$$

Donc :

$$f'(t) = f(t) \cdot f'(0) = f(t) \cdot X$$

$t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \exp(tX)$ vérifient la même équation différentielle avec la même condition initiale ($f(0) = Id$) donc elles sont égales.

Définition 3.5 : Générateur infinitésimal L'élément X de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \exp(tX)$$

est appelé générateur infinitésimal du groupe à un paramètre $t \mapsto f(t)$.

On a :

$$X = f'(0)$$

Et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, (f(t))^{-1} \cdot f'(t) = X$$

Définition 3.6 : Transformation infinitésimale Soit f un sous-groupe à un paramètre de $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$ et X son générateur infinitésimal, soit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \exp(tX)$$

Pour t proche de 0, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = Id + t \cdot X + o(t)$$

La transformation f au voisinage de 0 est appelée transformation infinitésimale.

Exemple : Les rotations d'axes O_x, O_y et O_z sont les groupes à un paramètre de la forme $t \mapsto (\exp(t\eta_i))_{i=1..3}$, où les générateurs infinitésimaux sont les $(\eta_i)_{i=1..3}$:

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : Lien avec la physique.

En physique, on appelle générateur infinitésimal d'un sous-groupe à un paramètre la matrice A telle que :

$$f(t) = \exp(-itA)$$

C'est à dire $A = iX$.

Ainsi, si le groupe de transformations est unitaire (ie si les $f(t)$ sont unitaires) alors l'opérateur A est hermitien (alors que X est anti-hermitien) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)t_{f(\bar{x})} = \text{Id} \implies \forall x \in \mathbb{R}, -ixA + ixt_{\bar{A}} = 0 \implies t_{\bar{A}} = A$$

La transformation infinitésimale s'écrit alors, pour t proche de 0 :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \text{Id} - it.A + o(t)$$

7.4 Groupes de Lie

Définition 4.1 : Groupe de Lie Un groupe de Lie linéaire est un sous-groupe fermé de $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$.

On s'intéressera uniquement aux groupes de Lie linéaires, que l'on qualifiera dorénavant de groupes de Lie.

Remarque : On peut identifier $\mathcal{GL}(n, \mathbb{C})$ avec un sous-groupe fermé de $\mathcal{GL}(2n, \mathbb{R})$. En effet, si A est dans $\mathcal{GL}(n, \mathbb{C})$ alors $A = B + iC$ avec B et C dans $\mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$. Et :

$$\begin{aligned} \mathcal{GL}(n, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{GL}(2n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes bijectif.

Un groupe de Lie est donc un sous-groupe fermé de $\mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$ pour un certain n .

Exemples : Groupes de Lie notoires

- (i) $\mathcal{SL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$.
- (ii) $\mathcal{SO}(n) \subset \mathcal{O}(n) \subset \mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$.
- (ii) $\mathcal{SL}(n, \mathbb{C}) \subset \mathcal{GL}(n, \mathbb{C})$.
- (iv) $\mathcal{SU}(n) \subset \mathcal{U}(n) \subset \mathcal{GL}(n, \mathbb{C})$.
- (v) Le groupe des transformations affines de \mathbb{R}^n .

7.5 Algèbre de Lie d'une groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie. Soit :

$$\mathfrak{g} = \{ \gamma'(0) / \gamma : I \mapsto G, C^1, \gamma(0) = \text{Id} \}$$

où I est un intervalle de \mathbb{R} contenant 0.

\mathfrak{g} est l'ensemble des vecteurs tangents aux courbes paramétrées C^1 tracées sur G et passant par l'identité en 0.

Théorème 5.1 :

- (i) \mathfrak{g} est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.
- (ii) $X \in \mathfrak{g} \iff \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G$
- (ii) Si X est dans \mathfrak{g} et h dans G alors $h.X.h^{-1}$ est dans \mathfrak{g} .
- (iv) \mathfrak{g} est stable par le commutateur des matrices : \mathfrak{g} est donc une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Preuve :

(i) Soit X dans \mathfrak{g} , c'est à dire :

$$\exists \gamma : I \mapsto G, C^1, \gamma(0) = \text{Id}, \gamma'(0) = X.$$

Montrons que pour λ réel quelconque, λX est aussi dans \mathfrak{g} , c'est à dire :

$$\exists \tilde{\gamma} : I \mapsto G, C^1, \tilde{\gamma}(0) = \text{Id}, \tilde{\gamma}'(0) = \lambda X.$$

Montrons que $t \mapsto \gamma(\lambda t)$ convient. On a :

$$t \mapsto \gamma(\lambda t) C^1 \text{ car } t \mapsto \gamma(t) C^1$$

$$\gamma(\lambda t) |_{t=0} = \gamma(0) = \text{Id}$$

Et :

$$\frac{d}{dt} \gamma(\lambda t) |_{t=0} = \lambda \gamma'(\lambda t) |_{t=0} = \lambda \gamma'(0) = \lambda X$$

Donc λX est aussi dans \mathfrak{g} .

Montrons maintenant que \mathfrak{g} est stable par addition. Soient X_1 et X_2 dans \mathfrak{g} :

$$\exists \gamma_1 : I \mapsto G, C^1, \gamma_1(0) = \text{Id}, \gamma_1'(0) = X_1$$

$$\exists \gamma_2 : I \mapsto G, C^1, \gamma_2(0) = \text{Id}, \gamma_2'(0) = X_2$$

Montrons que $X_1 + X_2$ est aussi dans \mathfrak{g} , c'est à dire :

$$\exists \tilde{\gamma} : I \mapsto G, C^1, \tilde{\gamma}(0) = \text{Id}, \tilde{\gamma}'(0) = X_1 + X_2.$$

Montrons que $t \mapsto (\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t)$ convient. On a :

$$t \mapsto (\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) C^1 \text{ car } t \mapsto \gamma_1(t) C^1 \text{ et } t \mapsto \gamma_2(t) C^1$$

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) |_{t=0} = \gamma_1(0) \cdot \gamma_2(0) = \text{Id} \cdot \text{Id} = \text{Id}$$

Et :

$$\frac{d}{dt} (\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) |_{t=0} = (\gamma_1'(t) \cdot \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \cdot \gamma_2'(t)) |_{t=0} = X_1 \cdot \text{Id} + X_2 \cdot \text{Id} = X_1 + X_2$$

Donc $X_1 + X_2$ est aussi dans \mathfrak{g} .

\mathfrak{g} est stable par combinaisons linéaires : c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

(ii) $\boxed{\implies}$ Soit X dans \mathfrak{g} :

$$\exists \gamma : I \mapsto G, C^1, \gamma(0) = \text{Id}, \gamma'(0) = X.$$

Montrons que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exp(t.X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\gamma\left(\frac{t}{k}\right) \right)^k$$

On pourra alors conclure puisque comme $\gamma(\frac{t}{k}) \in G$ alors $\exp(t.X) \in G$ car G est fermé (sous-groupe fermé de $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$). Soit donc t un réel quelconque. On a :

$$\begin{aligned} \gamma\left(\frac{t}{k}\right) &= \gamma(0) + \frac{t}{k}\gamma'(0) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) = \text{Id} + \frac{t}{k}X + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ \implies \log\left(\gamma\left(\frac{t}{k}\right)\right) &= \frac{t}{k}X + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ \implies \left(\gamma\left(\frac{t}{k}\right)\right)^k &= \exp(k \cdot \log\gamma\left(\frac{t}{k}\right)) = \exp(tX + O\left(\frac{1}{k}\right)) \end{aligned}$$

Le résultat s'obtient alors par passage à la limite.

$\boxed{\impliedby}$ Par hypothèse, $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G$.

Ainsi :

$$X = \frac{d}{dt} \exp(t.X)$$

Posons alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) = \exp(t.X)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) &= \exp(t.X) \in G \\ \gamma(0) &= \exp(0) = \text{Id} \\ t \mapsto \gamma(t) &= \exp(t.X) \text{ } C^1 \\ X &= \gamma'(0) \end{aligned}$$

Donc X est bien dans \mathfrak{g} .

(iii) Soit X dans \mathfrak{g} et h dans G . Montrons que hXh^{-1} est dans \mathfrak{g} . Montrons que $t \mapsto \exp(t.hXh^{-1})$ convient. On a :

$$hXh^{-1} = \frac{d}{dt} \exp(t.hXh^{-1}) \Big|_{t=0}$$

Et comme h est bijectif :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exp(t.hXh^{-1}) = h \exp(t.X) h^{-1}$$

Or h, h^{-1} et $\exp(t.X)$, pour tout t réel, sont dans G alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exp(t.hXh^{-1}) \in G$$

Enfin, $t \mapsto \exp(t.hXh^{-1})$ est C^1 et vaut 0 en l'identité, donc hXh^{-1} est dans \mathfrak{g} .

(iv) Soient X et Y dans \mathfrak{g} . On souhaite montrer que $[X, Y]$ l'est aussi. On vérifie que $t \mapsto \exp(t.X) Y \exp(-t.X)$ convient.

Définition 5.2 : Algèbre de Lie d'un groupe de Lie L'algèbre de Lie \mathfrak{g} , espace tangent à G en l'identité, s'appelle l'algèbre de Lie du groupe de Lie G .
La dimension de l'espace vectoriel \mathfrak{g} s'appelle la dimension du groupe de Lie G : c'est le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour paramétrer le groupe.

Proposition 5.3 : Algèbres de Lie notoires On note $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$, $\mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{u}(n)$ et $\mathfrak{su}(n)$ les algèbres de Lie respectives de $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$, $\mathcal{O}(n)$, $\mathcal{SO}(n)$, $\mathcal{U}(n)$ et $\mathcal{SU}(n)$.

(i)

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})\}, \quad \dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})) = n^2$$

(ii)

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) / \text{tr}(X) = 0\}, \quad \dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})) = n^2 - 1$$

(iii)

$$\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) / t_X = -X\}, \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{o}(n)) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(iv)

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) / t_{\bar{X}} = -X\}, \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}(n)) = n^2$$

(v)

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) / t_{\bar{X}} = -X, \text{tr}(X) = 0\}, \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{su}(n)) = n^2 - 1$$

Preuve : On va utiliser la propriété (ii) du théorème 5.1 : $X \in \mathfrak{g} \iff \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G$.
Démontrons par exemple (i) et (ii) : les autres démonstrations se font de la même manière.

(i)

$$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{K}).$$

Et cela n'impose aucune condition puisque :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), \exp(tX) \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{K}).$$

(ii)

$$X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in \mathcal{SL}(n, \mathbb{K})$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \det(\exp(tX)) = 1$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \text{tr}(t.X) = 0 \text{ via le corollaire 2.9}$$

$$\iff \text{tr}(X) = 0$$

7.6 Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie

7.6.1 Morphisme de groupes de Lie et différentielle d'un morphisme de groupes de Lie

Définition 6.1 : Morphisme de groupes de Lie Soient G et G' deux groupes de Lie. Un morphisme de groupe de Lie est un morphisme de groupes f de G dans G' continu.

Théorème 6.2 Soient G et G' deux groupes de Lie et f un morphisme de groupe de Lie de G dans G' . On note \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' les algèbres de Lie de G et G' . Alors :

- (i) $\forall X \in \mathfrak{g}, t \mapsto f(e^{t.X})$ est un sous-groupe à un paramètre de G' .
(ii) Posons pour tout X dans \mathfrak{g} :

$$\Psi(X) = \left. \frac{d}{dt} f(e^{t.X}) \right|_{t=0}$$

Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(e^{t.X}) = e^{t.\Psi(X)}$$

Et Ψ est un morphisme d'algèbres de Lie de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g}' .

Preuve : Je vais juste démontrer le (i), la démonstration du (ii) est un peu longue, on la trouve par exemple dans [Kosmann-Schwarzbach].

- (i) Soit X fixé dans \mathfrak{g} . L'application $t \mapsto f(e^{t.X})$ est continue par composition et :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, f(e^{(s+t).X}) = f(e^{(s.X+t.X)}) = f(e^{(s.X)}e^{(t.X)})$$

car X commute avec X .

Or f est un morphisme de groupes donc on peut conclure puisqu'alors :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, f(e^{(s+t).X}) = f(e^{(s.X)}e^{(t.X)}) = f(e^{(s.X)})f(e^{(t.X)})$$

Définition 6.3 : Différentielle d'un morphisme de groupes de Lie Le morphisme d'algèbres de Lie défini dans le théorème 6.2 :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g}' \\ X &\mapsto \left. \frac{d}{dt} f(e^{t.X}) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

est appelé différentielle du morphisme de groupes de Lie f , et noté D_f .

Moralité : Lorsqu'on se donne un morphisme de groupes de Lie f de G dans G' , on est alors capable de construire un morphisme d'algèbre de Lie de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g}' en posant :

$$\forall X \in \mathfrak{g}, D_f(X) = \left. \frac{d}{dt} f(e^{t.X}) \right|_{t=0}$$

7.6.2 Représentation d'un groupe de Lie et différentielle d'une représentation d'un groupe de Lie

On admet que si E est un espace de Hilbert de dimension finie, réel ou complexe, alors $\mathcal{GL}(E)$ est un groupe de Lie réel.

Définition 6.4 : Représentation d'un groupe de Lie Une représentation d'un groupe de Lie G est la donnée d'un espace de Hilbert E de dimension finie, réel ou complexe, et d'un morphisme de groupes de Lie de G dans $\mathcal{GL}(E)$.

Moralité : Une représentation d'un groupe de Lie est la donnée du couple (E, ρ) .

Définition 6.5 : Différentielle d'une représentation d'un groupe de Lie Soit (E, ρ) une représentation de G . On note $\mathfrak{gl}(E)$ l'algèbre de Lie de $\mathcal{GL}(E)$.

La différentielle de la représentation ρ est la représentation $(\mathfrak{gl}(E), D_\rho)$ de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , où D_ρ est définie par :

$$\begin{aligned} D_\rho : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(E) \\ X &\mapsto D_\rho(X) \stackrel{\text{déf.}}{=} \left. \frac{d}{dt} \rho(e^{tX}) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

Remarque : $(\mathfrak{gl}(E), D_\rho)$ est bien une représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . En effet, comme ρ est un morphisme de groupes de Lie de G dans $\mathcal{GL}(E)$, via le théorème 6.2 D_ρ est un morphisme d'algèbres de Lie de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{gl}(E)$, ce qui permet de conclure par définition d'une représentation d'algèbre de Lie (définition 1.8).

7.6.3 La représentation adjointe

Soit G un groupe de Lie. On fait agir G sur lui-même par conjugaison; cela revient à se donner un morphisme de groupes α de (G, \cdot) dans (σ_G, \circ) défini par :

$$\begin{aligned} \alpha : (G, \cdot) &\rightarrow (\sigma_G, \circ) \\ g &\mapsto \alpha(g) : G \rightarrow G \\ h &\mapsto \alpha(g)(h) \stackrel{\text{déf.}}{=} g.h.g^{-1} \end{aligned}$$

$\alpha(g)$ est un automorphisme du groupe de Lie G , noté C_g .

On s'intéresse alors à sa différentielle DC_g qui est donc un automorphisme de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} : DC_g est l'adjonction par g , et on la note plutôt Ad_g . On a ainsi :

$$\begin{aligned} C_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto g.h.g^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ad_g : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ X &\mapsto Ad_g(X) \end{aligned}$$

Remarque : Vu que α est un morphisme de groupes de (G, \cdot) dans (σ_G, \circ) , on a :

$$\forall g, g' \in G, C_{g.g'} = C_g \circ C_{g'}$$

Définition 6.7 : Représentation adjointe d'un groupe de Lie Soit G un groupe de Lie et \mathfrak{g} son algèbre de Lie.

On appelle représentation adjointe du groupe de Lie G , le morphisme de groupes de Lie de G dans $\mathcal{GL}(\mathfrak{g})$, noté Ad et défini par :

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G &\rightarrow \mathcal{GL}(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto \text{Ad}_g \end{aligned}$$

C'est bien un morphisme de groupes puisque de $C_g \circ C_{g'}$, on tire :

$$\forall g, g' \in G, \text{Ad}_{g \cdot g'} = \text{Ad}_g \circ \text{Ad}_{g'}$$

Définition 6.8 : Représentation adjointe d'une algèbre de Lie La différentielle DAd de la représentation adjointe Ad est notée ad :

$$\begin{aligned} \text{ad} : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\mapsto \text{ad}_X \stackrel{\text{déf.}}{=} \text{DAd}(X) \end{aligned}$$

Proposition 6.9 : Soit G un groupe de Lie et \mathfrak{g} son algèbre de Lie.

(i) Soit A dans G et X dans \mathfrak{g} . Alors :

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \text{Ad}_A(X) = AXA^{-1}$$

(ii) Soient X et Y dans \mathfrak{g} . Alors :

$$\text{ad}_X(Y) = [X, Y]$$

(iii) Soient X et Y dans \mathfrak{g} . Alors :

$$\text{ad}_{[X, Y]} = [\text{ad}_X, \text{ad}_Y]$$

(iv)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathfrak{g}, \text{Ad}_{\exp(t \cdot X)} = \exp(t \cdot \text{ad}_X)$$

Preuve :

(i) Ad_A est la différentielle de C_A . Donc :

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \text{Ad}_A(X) = \frac{d}{dt} C_A(e^{t \cdot X}) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} A e^{t \cdot X} A^{-1} \Big|_{t=0} = AXA^{-1}$$

(ii)

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \text{ad}_X(Y) = \frac{d}{dt} \text{ad}_{e^{t \cdot X}}(Y) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{t \cdot X} Y e^{-t \cdot X} \Big|_{t=0} = XY - YX$$

(iii) Le résultat s'obtient directement puisque ad est une représentation d'algèbre de Lie.

(iv) De même avec la propriété (ii) du théorème 6.2.

7.7 Références pour le chapitre 7

[Kosmann-Schwarzbach]

Chapitre 8

Les groupes de Lie $\mathcal{SO}(3)$ et $SU(2)$

Je vais étudier dans ce chapitre un groupe de Lie particulier, le groupe de Lie $\mathcal{SO}(3)$.

Je vais l'étudier en relation avec $SU(2)$.

On va montrer que $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$ sont isomorphes en montrant qu'elles admettent des bases où elles vérifient les mêmes relations de commutation, mais que $\mathcal{SO}(3)$ et $SU(2)$ ne le sont pas.

On a vu au chapitre précédent que :

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) / t_{\bar{X}} = -X, \text{tr}(X) = 0\}, \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{su}(2)) = 2^2 - 1 = 3$$

$$\mathfrak{so}(3) = \{X \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) / t_X = -X\}, \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{so}(3)) = \frac{3(3-1)}{2} = 3$$

8.1 Les algèbres de Lie $\mathfrak{so}(3)$ et $\mathfrak{su}(2)$

8.1.1 Bases de $\mathfrak{su}(2)$

Les trois matrices ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 définies par :

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathfrak{su}(2)$. Elles vérifient les relations de commutation :

$$[\xi_k, \xi_l] = \xi_m$$

où k, l, m est une permutation circulaire de 1, 2, 3.

On introduit aussi en physique quantique les matrices de Pauli σ_1 , σ_2 et σ_3 définies par :

$$\sigma_1 = -2i\xi_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = 2i\xi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = -2i\xi_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elles forment une base de $\mathfrak{su}(2)$. Elles vérifient les relations de commutation :

$$[\sigma_k, \sigma_l] = 2i\sigma_m$$

où k, l, m est une permutation circulaire de 1, 2, 3.

On introduit aussi la base :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Elles vérifient :

$$I^2 = J^2 = K^2 = -\text{Id} \\ IJ = K = -JI, \quad JK = I = -KJ, \quad KI = J = -KI$$

et les relations de commutations s'écrivent donc :

$$[I, J] = 2K, \quad [J, K] = 2I, \quad [K, I] = 2J$$

Interprétation : Soit \mathbb{H} l'algèbre associative des quaternions, espace vectoriel de dimension 4, de base $1, i, j, k$ avec la multiplication définie par :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k = -ij, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik$$

L'application $i \mapsto I, j \mapsto J, k \mapsto K$ définit une bijection de $\mathfrak{su}(2)$ sur le sous-espace vectoriel de \mathbb{H} engendré par i, j, k , appelé espace vectoriel des quaternions purs et noté \mathbb{H}_0 .

La multiplication sur \mathbb{H}_0 définie plus haut est un crochet de Lie et donc la bijection évoquée est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

8.1.2 Bases de $\mathfrak{so}(3)$

Les trois matrices η_1, η_2 et η_3 définies par :

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathfrak{so}(3)$. Elles vérifient les relations de commutation :

$$[\eta_k, \eta_l] = \eta_m$$

où k, l, m est une permutation circulaire de $1, 2, 3$.

8.1.3 Isomorphisme entre $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$

Proposition 1.1 : On considère la base $(\eta_k)_{1 \leq k \leq 3}$ de $\mathfrak{so}(3)$ et la base $(e_k)_{1 \leq k \leq 3}$ de \mathbb{R}^3 . L'application Ψ définie sur les vecteurs de base :

$$\Psi : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \eta_k \mapsto e_k$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $\mathfrak{so}(3)$ et \mathbb{R}^3 .

Preuve : Les bases $(\eta_k)_{1 \leq k \leq 3}$ de $\mathfrak{so}(3)$ et $(e_k)_{1 \leq k \leq 3}$ de \mathbb{R}^3 vérifient les mêmes relations de commutation : d'après la proposition 1.6 du chapitre 7 l'application Ψ est un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $\mathfrak{so}(3)$ et \mathbb{R}^3 .

Proposition 1.2 : On considère la base $(\xi)_{1 \leq k \leq 3}$ de $\mathfrak{su}(2)$ et la base $(\eta_k)_{1 \leq k \leq 3}$ de $\mathfrak{so}(3)$.
L'application Φ définie sur les vecteurs de base :

$$\begin{aligned}\Phi : \mathfrak{su}(2) &\rightarrow \mathfrak{so}(3) \\ \xi_k &\mapsto \eta_k\end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$.

Preuve : Les bases $(\xi_k)_{1 \leq k \leq 3}$ de $\mathfrak{su}(2)$ et $(\eta_k)_{1 \leq k \leq 3}$ de $\mathfrak{so}(3)$ vérifient les mêmes relations de commutation : d'après la proposition 1.6 du chapitre 7 l'application Φ est un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$.

Proposition 1.3 : On considère la base (I, J, K) de $\mathfrak{su}(2)$ et la base $(e_k)_{1 \leq k \leq 3}$ de \mathbb{R}^3 .
L'application Γ :

$$\Gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{su}(2)$$

définie sur les vecteurs de base $(I \mapsto e_1, J \mapsto e_2, K \mapsto e_3)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $\mathfrak{su}(2)$ et \mathbb{R}^3 .

Preuve : On vérifie facilement que Γ est injective.

8.2 Le morphisme de revêtement de $SU(2)$ sur $\mathcal{SO}(3)$

Bien que leurs algèbres de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$ soient isomorphes, les groupes de Lie $\mathcal{SO}(3)$ et $SU(2)$ ne le sont pas.

On va montrer qu'il existe un morphisme surjectif de $SU(2)$ sur $\mathcal{SO}(3)$ de noyaux $\text{Id}_{SU(2)}$ et $-\text{Id}_{SU(2)}$ de $SU(2)$.

8.2.1 Le groupe $\mathcal{SO}(3)$

Par définition :

$$\mathcal{SO}(3) = \{X \in \mathcal{GL}(3, \mathbb{R}) / t_X X = I, \det(X) = 1\}$$

Les éléments de $\mathcal{SO}(3)$ sont les rotations d'angle $t \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$, et de sous-espace vectoriel invariant la droite $\text{Vect}(a)$, pour a unitaire.

Les éléments de $\mathcal{SO}(3)$ sont donc caractérisés par a et t , on les note $\text{Rot}(a, t)$ et on peut montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \text{Rot}(a, t)(x) = x + (1 - \cos(t))a \wedge (a \wedge x) + \sin(t).a \wedge x$$

Proposition 2.1 : Rotations infinitésimales Pour t proche de 0, c'est à dire pour un angle de rotation petit, on obtient par développement limité à l'ordre 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \text{Rot}(a, t)(x) \simeq x + t.a \wedge x + o(t)$$

On appelle ces transformations des rotations infinitésimales.

Proposition 2.2 (admise) : Rotations conjuguées Deux rotations $\text{Rot}(a, t)$ et $\text{Rot}(b, t)$ sont conjuguées dans $\mathcal{SO}(3)$ si et seulement si $t = t'$.

Remarque : L'élément g de $\mathcal{SO}(3)$ qui les conjugue est précisément le g tel que $a = g(b)$.

Proposition 2.3 : L'application à t fixé :

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(3) &\rightarrow \mathcal{SO}(3) \\ X &\mapsto \exp(t.X) \end{aligned}$$

est surjective.

Preuve : On considère la base $(\eta_k)_{1 \leq k \leq 3}$ de $\mathfrak{so}(3)$. Un calcul simple montre que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall k, 1 \leq k \leq 3, \text{Rot}(e_k, t) = \exp(t.\eta_k)$$

Soit alors un vecteur a de \mathbb{R}^3 unitaire et g un élément de $\mathcal{SO}(3)$ tel que $a = g(e_k)$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \text{Rot}(a, t) = g \exp(t.\eta_k) g^{-1} = g \exp(t.\eta_k) g^{-1} = \exp(t. \underbrace{g\eta_k g^{-1}}_{\in \mathfrak{so}(3)})$$

Remarque : L'application n'est évidemment pas injective puisque $\exp((t + 2\pi l).X) = \exp(t.X)$ mais $(t + 2\pi l).X \neq t.X$.

Proposition 2.4 : Reprenons l'application Ψ de la proposition 1.1 et intéressons-nous à son inverse :

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathfrak{so}(3) \\ a &\mapsto \Psi^{-1}(a) \end{aligned}$$

où Ψ^{-1} est définie par l'image des vecteurs de base ($\Psi^{-1}(e_k) = \eta_k$). D'où :

$$\forall a \in \mathbb{R}^3, \Psi^{-1}(a) = \Psi^{-1}(\alpha_k.e_k + \alpha_l.e_l + \alpha_m.e_m) = \alpha_k.\eta_k + \alpha_l.\eta_l + \alpha_m.\eta_m \stackrel{\text{not.}}{=} M_a$$

Alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}^3, \|a\| = 1, \forall t \in \mathbb{R}, \exp(t.M_a) = \text{Rot}(a, t)$$

Preuve : Les deux membres sont clairement des groupes à un paramètre de $\mathcal{SO}(3)$. Montrons qu'ils ont la même dérivée en 0, ce qui est suffisant pour conclure (ils vérifieraient alors la même ED du premier ordre avec même condition initiale).

Or :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \frac{d}{dt} \text{Rot}(a, t)(x) |_{t=0} = a \wedge x$$

Et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \frac{d}{dt} \exp(t.M_a)(x) |_{t=0} = M_a(x)$$

Mais on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, M_{e_k}(x) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \eta_k(x)$$

Un calcul simple montre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \eta_k(x) = e_k \wedge x$$

Par linéarité on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, M_a(x) = a \wedge x$$

D'où le résultat.

Proposition 2.5 : Rotations infinitésimales Pour t proche de 0, c'est à dire pour un angle de rotation petit, on obtient par développement limité à l'ordre 1 :

$$\text{Rot}(a, t) = \text{Id} + t.M_a + o(t)$$

On obtient donc une autre expression des rotations infinitésimales.

8.2.2 Le groupe $SU(2)$

Par définition :

$$SU(2) = \{X \in \mathcal{GL}(2, \mathbb{C}) / {}_t\bar{X}X = I, \det(X) = 1\}$$

On montre que ceci est équivalent à :

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

$SU(2)$ est donc difféomorphe à la sphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$.

Proposition 2.6 :

$$\forall A \in SU(2), \exists t \in \mathbb{R}, \exists g \in U(2), A = g \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} g^{-1}$$

Preuve : $A \in SU(2) \subset U(2)$: A est donc unitairement semblable à une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont de module 1 et \mathbb{C} -conjugués.

Proposition 2.7 : L'application à t fixé :

$$\begin{aligned} \mathfrak{su}(2) &\rightarrow SU(2) \\ X &\mapsto \exp(t.X) \end{aligned}$$

est surjective.

Preuve : D'après la proposition 2.6 :

$$\forall A \in \mathcal{SU}(2), \exists t \in \mathbb{R}, \exists g \in \mathcal{U}(2), A = g \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} g^{-1}$$

Or :

$$\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} = \exp(t.K)$$

où :

$$K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\forall A \in \mathcal{SU}(2), \exists t \in \mathbb{R}, \exists g \in \mathcal{U}(2), A = g \exp(t.K) g^{-1} = \exp(t. \underbrace{gKg^{-1}}_{\in \mathfrak{su}(2)})$$

Lemme 2.7 : Soit X dans $\mathfrak{su}(2)$, tel que : $\det(X)=1$. Alors : $X^2 = -\text{Id}$.

Preuve : Le théorème de Cayley-Hamilton donne : $X^2 - \underbrace{\text{tr}(X)}_{=0}.X + \underbrace{\det(X)}_{=1}.\text{Id} = 0$

Proposition 2.8 :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathfrak{su}(2), \det(X) = 1, \exp(t.X) = \cos(t).\text{Id} + \sin(t).X$$

Preuve : Les deux membres ont X pour dérivée en 0. Vu que $t \mapsto \exp(t.X)$ est un sous-groupe à un paramètre de $\mathcal{GL}(2, \mathbb{C})$, il suffit de montrer que $t \mapsto \cos(t).\text{Id} + \sin(t).X$ en est un aussi (pour des matrices X de déterminant 1 dans $\mathfrak{su}(2)$).

Soit X fixé dans $\mathfrak{su}(2)$, de déterminant 1, et s et t des réels quelconques :

$$(\cos(t).\text{Id} + \sin(t).X)(\cos(s).\text{Id} + \sin(s).X) = \cos(t)\cos(s).\text{Id} + \sin(t)\sin(s).X^2 + (\sin(t)\cos(s).X + \cos(t)\sin(s).X)$$

Donc vu que $X^2 = -\text{Id}$:

$$(\cos(t).\text{Id} + \sin(t).X)(\cos(s).\text{Id} + \sin(s).X) = \cos(t+s).\text{Id} + \sin(t+s).X$$

Finalement, $t \mapsto \cos(t).\text{Id} + \sin(t).X$ est bien un sous-groupe à un paramètre de $\mathcal{GL}(2, \mathbb{C})$.

Interprétation :

$$\underbrace{\exp(t.X)}_{\in \mathcal{SU}(2)} = \cos(t).\text{Id} + \sin(t). \underbrace{X}_{\in \mathfrak{su}(2)}$$

Or X peut se décomposer sur la base (I, J, K) de $\mathfrak{su}(2)$, et finalement :

$$\forall A \in \mathcal{SU}(2), A = \alpha_0 \text{Id} + \alpha_1 I + \alpha_2 J + \alpha_3 K$$

$\mathcal{SU}(2)$ est donc isomorphe aux quaternions de norme 1.

8.2.3 Projection de $SU(2)$ sur $SO(3)$

On considère :

$$\text{Ad} : SU(2) \rightarrow \mathcal{GL}(\mathfrak{su}(2))$$

Or $\mathfrak{su}(2)$ et \mathbb{R}^3 sont isomorphes. Donc Ad s'identifie à :

$$\begin{aligned} \Phi : SU(2) &\rightarrow \mathcal{GL}(3, \mathbb{R}) \\ g &\mapsto \text{Ad}_g \end{aligned}$$

Mais on sait que :

$$\begin{aligned} \text{Ad}_g : \mathfrak{su}(2) &\rightarrow \mathfrak{su}(2) \\ X &\mapsto gXg^{-1} \end{aligned}$$

conserve le déterminant. Donc Φ conserve l'homologue du déterminant c'est à dire la norme au carré de \mathbb{R}^3 , d'où l'inclusion :

$$\Phi(SU(2)) \subset \mathcal{O}(3)$$

En fait on a même $\Phi(SU(2)) \subset \mathcal{SO}(3)$ car Φ est continue et $SU(2)$ est connexe.

Proposition 2.9 : Φ est un morphisme de groupes de $SU(2)$ dans $\mathcal{SO}(3)$.

Preuve : Ce résultat a déjà été démontré (définition 6.7 du chapitre 7).

Proposition 2.10 : Reprenons l'application Γ de la proposition 1.3 :

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathfrak{su}(2) \\ a &\mapsto \Gamma(a) \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall a \in \mathbb{R}^3, \Gamma(a) = \Gamma(x_1.e_1 + x_2.e_2 + x_3.e_3) = x_1.I + x_2.J + x_3.K \stackrel{\text{not.}}{=} X_a$$

Alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}^3, \|a\| = 1, \forall t \in \mathbb{R}, \Phi(\exp(t.X_a)) = \text{Rot}(a, 2t)$$

Preuve : Soit $a = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$X_a = x_1.I + x_2.J + x_3.K$$

D'après la proposition 6.9 du chapitre 7 :

$$\text{ad}_{X_a}(I) = [X_a, I] = -2x_2.K + 2x_3.J$$

On a de même :

$$\text{ad}_{X_a}(J) = [X_a, J] = 2x_1.K - 2x_3.J$$

Et :

$$\text{ad}_{X_a}(K) = [X_a, I] = -2x_1 \cdot J + 2x_2 \cdot I$$

On obtient donc la matrice de (ad_{X_a}) dans la base (I, J, K) :

$$2 \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} = 2(x_1 \cdot \eta_1 + x_2 \cdot \eta_2 + x_3 \cdot \eta_3) = 2M_a \in \mathfrak{so}(3)$$

Or d'après la proposition 6.9 du chapitre 7 :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall X_a \in \mathfrak{su}(2), \text{Ad}_{\exp(t \cdot X_a)} = \exp(t \cdot \text{ad}_{X_a})$$

Soit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall X_a \in \mathfrak{su}(2), \text{Ad}_{\exp(t \cdot X_a)} = \Phi(\exp(t \cdot X_a)) = \exp(2t \cdot M_a)$$

On obtient le résultat pour les vecteurs a de norme 1 en utilisant la proposition 2.4.

Corollaire 2.11 : $\Phi : \mathcal{SU}(2) \rightarrow \mathcal{SO}(3)$ est surjective. Mais elle n'est pas injective :

$$\text{Ker}(\Phi) = \{-\text{Id} ; \text{Id}\}$$

Preuve :

SURJECTIVITE Les éléments de $\mathcal{SO}(3)$ sont les $\text{Rot}(a, t)$ pour a de norme 1 et la proposition précédente donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^3, \|a\| = 1, \text{Rot}(a, 2t) = \underbrace{\Phi(\exp(t \cdot X_a))}_{\in \mathcal{SU}(2)}$$

NON INJECTIVITE Par définition :

$$\text{Ker}(\Phi) = \{X \in \mathcal{SU}(2) / \text{Ad}_X = \text{Id}\}$$

Or :

$$\text{Ad}_X = \text{Id}$$

est équivalent en décomposant sur la base (I, J, K) de $\mathfrak{su}(2)$ à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ad}_X(I) = I = X I X^{-1} \\ \text{Ad}_X(J) = J = X J X^{-1} \\ \text{Ad}_X(K) = K = X K X^{-1} \end{array} \right.$$

La résolution de ce système donne alors le résultat cherché.

8.3 Références pour le chapitre 8

[Kosmann-Schwarzbach]

Troisième partie

Application en physique quantique : invariances, symétries et lois de conservation

Chapitre 9

Théorème de Noether et lois de conservation en physique classique

Je vais démontrer dans cette partie les résultats sur les lois de conservation en physique **classique** évoqués dans la première partie. Je démontrerai alors le théorème de Noether qui assure l'existence d'une quantité conservée à chaque fois que les lois de la physique présentent une symétrie.

9.1 Les équations de Lagrange

On se place dans \mathbb{R}^3 et on considère n points de masses respectives m_1, \dots, m_n , repérés par leurs coordonnées $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Les mouvements de ces points dans un champ d'énergie potentielle différentiable $U : \mathbb{R}^{3n} \mapsto \mathbb{R}$ sont décrits par la loi de Newton (cf partie 1) :

$$\begin{cases} \forall i, 1 \leq i \leq n, & m_i \cdot \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \\ \forall i, 1 \leq i \leq n, & m_i \cdot \ddot{y}_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i} \\ \forall i, 1 \leq i \leq n, & m_i \cdot \ddot{z}_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i} \end{cases}$$

Remarque : On a un système de $3n$ équations : 3 projections scalaires pour les n points.

Les $6n$ variables $(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes et on clôt le système avec les $3n$ équations supplémentaires (3 projections scalaires pour les n points) :

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \quad \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \dot{\vec{r}}_i$$

Définitions $U = U(\vec{r}_i)$ est l'énergie potentielle et $T = T(\dot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\dot{r}_i^2}{2}$ est l'énergie cinétique.

On introduit alors l'application $L : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$L(\vec{r}_i, \vec{r}_i) = T(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_i) \quad (9.1)$$

Je vais faire les calculs en projection selon l'axe O_x par exemple. On a d'après la définition de T et l'équation 9.1 :

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i \quad (9.2)$$

Or d'après la définition de T et la première loi de Newton :

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} = m_i \ddot{x}_i \quad (9.3)$$

Soit finalement en combinant 9.2 et 9.3 :

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (9.4)$$

Finalement le système de $3n$ équations issu de la première loi de Newton est équivalent au système de $3n$ équations composé de 9.4 et des projections analogues selon O_y et O_z . On a donc le théorème suivant :

Théorème Soient $q = (q_i)_{1 \leq i \leq 3n}$ des coordonnées sur l'espace de configuration d'un système potentiel de n points matériels : ces coordonnées regroupent les trois projections selon O_x , O_y et O_z .

Alors la variation de q en fonction du temps obéit à l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 & \forall i, 1 \leq i \leq 3n \\ \frac{\partial q_i}{\partial t} = \dot{q}_i & \forall i, 1 \leq i \leq 3n \end{cases}$$

où $L = T - U = L(q_i, \dot{q}_i)$.

Remarque : On s'est intéressé au cas où T et U ne dépendent pas du temps. Ce théorème est encore valable, et on l'admettra, dans le cas plus général où $L = T - U = L(q_i, \dot{q}_i, t)$.

9.2 Invariance par translation temporelle

Je vais étudier dans ce paragraphe la symétrie des lois de la physique **classique** par translation dans le temps, et montrer qu'elle est liée à la conservation de l'énergie.

Considérons un système isolé de n particules dont on écrit la fonction de Lagrange dans un système de coordonnées scalaires (q_i, \dot{q}_i, t) , $1 \leq i \leq 3n$:

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (9.5)$$

L'invariance des lois de la physique par translation temporelle, qui est supposée vérifiée pour des systèmes isolés, est équivalente à dire que l'écoulement du temps est homogène, et signifie que les lois sont les mêmes aux temps t et $t+t_0$, t_0 quelconque.

Cela implique que la fonction de Lagrange ne dépend pas du temps, soit :

$$L = L(q_i, \dot{q}_i) \quad (9.6)$$

D'où alors :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \cdot \ddot{q}_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=0} \quad (9.7)$$

D'après l'équation de Lagrange pour un système isolé de n particules :

$$\forall i, 1 \leq i \leq 3n, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (9.8)$$

En remplaçant 9.8 dans 9.7 :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \cdot \ddot{q}_i \quad (9.9)$$

Soit :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (9.10)$$

D'où finalement :

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_i \dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (9.11)$$

Et donc :

$$\sum_i \dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{cste} \quad (9.12)$$

Or l'hamiltonien H du système, qui représente l'énergie totale du système est par définition :

$$H = T - L = \sum_i \dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (9.13)$$

où l'expression de T vient de 9.2.

On a finalement :

$$\boxed{H = \text{cste}}$$

Bilan : En physique classique, il y a donc conservation de l'énergie totale pour les systèmes isolés, dont les lois physiques sont invariantes par translation dans le temps.

Remarquons que la linéarité de H par rapport à L assure que ce résultat est valable pour deux systèmes isolés représentés par L_1 et L_2 où l'énergie conservée sera simplement $H_1 + H_2$. Cela est vrai tant qu'il n'existe aucune interaction L_{12} entre les deux systèmes.

Les systèmes pour lesquels l'énergie totale est conservée sont appelés systèmes conservatifs.

9.3 Invariance par translation spatiale

Je vais étudier ici la symétrie des lois de la physique **classique** par translation dans l'espace, et montrer qu'elle est liée à la conservation de la quantité de mouvement.

Considérons un système isolé de n particules dont on écrit la fonction de Lagrange dans un système de coordonnées vectorielles $(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)$, $1 \leq i \leq n$:

$$L = L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \quad (9.14)$$

L'invariance des lois de la physique par translation spatiale, qui est supposée vérifiée pour des systèmes isolés, est équivalente à dire que l'espace est homogène, et signifie que la fonction de Lagrange reste inchangée par changement de coordonnées $\vec{r}_i \mapsto \vec{r}_i + \vec{a}$, $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ vecteur arbitraire :

$$\forall \vec{a}, L(\vec{r}_i + \vec{a}, \dot{\vec{r}}_i, t) = L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \quad (9.15)$$

Soit :

$$\forall \vec{a}, \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \cdot a_x = \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i} \cdot a_y = \sum_i \frac{\partial L}{\partial z_i} \cdot a_z = 0 \quad (9.16)$$

\vec{a} étant quelconque on a donc :

$$\forall \vec{a}, \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0 \quad (9.17)$$

Exécutons les calculs en projection suivant l'axe O_x . L'équation d'Euler-Lagrange donne pour un système isolé de n particules :

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad (9.18)$$

En remplaçant 9.18 dans 9.17 on obtient :

$$\sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (9.19)$$

Et donc :

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{cste} \quad (9.20)$$

Or par définition la quantité de mouvement totale du système \vec{p} est :

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i p_{x_i} \\ \sum_i p_{y_i} \\ \sum_i p_{z_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \\ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \\ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \end{pmatrix} \quad (9.21)$$

Soit finalement :

$$p_x = \text{cste}$$

Bilan : En physique classique, il y a donc conservation de la quantité de mouvement totale pour les systèmes isolés, dont les lois physiques sont invariantes par translation dans l'espace. On obtient évidemment les mêmes relations suivant O_y et O_z .

9.4 Invariance par rotation

Je vais étudier ici la symétrie des lois de la physique **classique** par rotation, et montrer qu'elle est liée à la conservation du moment cinétique. On va s'intéresser aux rotations infinitésimales pour simplifier les calculs : cela n'enlève aucune généralité puisque toute rotation finie est un produit de rotations infinitésimales (une rotation est une transformation continue). En effet, si on obtient une loi de conservation sur les rotations infinitésimales qui assure qu'une quantité Q est conservée alors celle-ci sera conservée à chaque rotation infinitésimale et elle le sera donc au bout d'un nombre quelconque de rotations infinitésimales, et donc pour une rotation finie quelconque.

Faisons un bref rappel sur les rotations infinitésimales.

Proposition : Rotation infinitésimale Au cours d'une rotation infinitésimale d'axe \hat{u} , où \hat{u} est un vecteur unitaire, et d'angle $\delta\Phi$, tout vecteur \vec{r} de \mathbb{R}^3 est modifié de la quantité $\delta\vec{r}$ (on note $\delta\Phi\hat{u} = \delta\vec{\Phi}$) :

$$\text{Rot}(\hat{u}, \delta\Phi)(\vec{r}) = \vec{r} + \delta\vec{r} = \vec{r} + \delta\vec{\Phi} \wedge \vec{r}$$

Remarque : Ceci est donc aussi valable pour la vitesse \vec{v} .

Preuve : On utilise le résultat issu de la partie mathématique (chapitre 9) sur les rotations infinitésimales (développement à l'ordre 1 des cosinus et sinus) :

$$\text{Rot}(\hat{u}, \delta\Phi)(\vec{r}) = \vec{r} + (1 - \cos(\delta\Phi)) \cdot \hat{u} \wedge (\hat{u} \wedge \vec{r}) + \sin(\delta\Phi) \cdot \hat{u} \wedge \vec{r} \simeq \vec{r} + \delta\vec{\Phi} \wedge \vec{r}$$

Revenons à l'étude de l'invariance par rotation.

Considérons un système isolé de n particules dont on écrit la fonction de Lagrange dans un système de coordonnées vectorielles $(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t)$, $1 \leq i \leq n$:

$$L = L(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t) \tag{9.22}$$

L'invariance des lois de la physique par rotation, qui est supposée vérifiée pour des systèmes isolés, est équivalente à dire que l'espace est isotrope, et signifie que la fonction de Lagrange doit être invariante par rotation infinitésimale soit :

$$L = L(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t) = L(\vec{r}_i + \delta\vec{r}_i, \vec{v}_i + \delta\vec{v}_i, t) \tag{9.23}$$

Soit :

$$\sum_i \left(\frac{\partial \vec{L}}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta\vec{r}_i + \frac{\partial \vec{L}}{\partial \vec{v}_i} \cdot \delta\vec{v}_i \right) = 0 \tag{9.24}$$

où on a noté :

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial \vec{r}_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_i} \\ \frac{\partial L}{\partial y_i} \\ \frac{\partial L}{\partial z_i} \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \vec{L}}{\partial \vec{v}_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial v_{ix}} \\ \frac{\partial L}{\partial v_{iy}} \\ \frac{\partial L}{\partial v_{iz}} \end{pmatrix} \quad (9.25)$$

Dans les mêmes notations, les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{L}}{\partial \vec{v}_i} = \frac{\partial \vec{L}}{\partial \vec{r}_i} \quad (9.26)$$

9.24 avec les expressions de $\delta \vec{r}_i$ et $\delta \vec{v}_i$ s'écrit :

$$\sum_i \left(\frac{\partial \vec{L}}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{\Phi} \wedge \vec{r}_i + \frac{\partial \vec{L}}{\partial \vec{v}_i} \cdot \delta \vec{\Phi} \wedge \vec{v}_i \right) = 0 \quad (9.27)$$

D'où par permutation circulaire :

$$\delta \vec{\Phi} \cdot \left[\sum_i \left(\vec{r}_i \wedge \frac{\partial \vec{L}}{\partial \vec{r}_i} + \vec{v}_i \wedge \frac{\partial \vec{L}}{\partial \vec{v}_i} \right) \right] = 0 \quad (9.28)$$

On insère alors les équations de Lagrange 9.26 :

$$\delta \vec{\Phi} \cdot \left[\sum_i \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_i \wedge \frac{\partial \vec{L}}{\partial \vec{v}_i} \right) \right] = 0 \quad (9.29)$$

$\delta \vec{\Phi}$ étant arbitraire on obtient :

$$\sum_i \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_i \wedge \frac{\partial \vec{L}}{\partial \vec{v}_i} \right) = \vec{0} \quad (9.30)$$

Ce qui donne par intégration :

$$\sum_i \left(\vec{r}_i \wedge \frac{\partial \vec{L}}{\partial \vec{v}_i} \right) = cste \quad (9.31)$$

Et vue l'expression 9.21 de \vec{p} :

$$\sum_i \left(\vec{r}_i \wedge \vec{p} \right) = \vec{J} = cste$$

où \vec{J} est le moment cinétique total du système.

Bilan : En physique classique, il y a donc conservation du moment cinétique total pour les systèmes isolés, dont les lois physiques sont invariantes par rotation.
Si d'autres particules sont ajoutées, leurs contributions au moment cinétique s'additionnent, que les particules interagissent ou pas avec les premières.

9.5 Théorème de Noether

Les résultats démontrés aux paragraphes 9.2, 9.3 et 9.4 sont en fait des cas particuliers d'un théorème plus général, que l'on doit à Emmy Noether (1918).

Théorème de Noether A toute symétrie des lois physiques correspond une grandeur conservée. Plus précisément, si les lois de la physique décrivant un système isolé sont invariantes par une transformation de coordonnées $(t, q) \mapsto (t'(t), q'(q, t))$ alors il existe une intégrale première du mouvement.

Preuve : Je m'inspire ici de la démonstration du [Greiner-Müller].

Soit un système isolé de n particules dont on écrit la fonction de Lagrange dans un système de coordonnées scalaires (q_i, \dot{q}_i, t) , $1 \leq i \leq 3n$:

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (9.32)$$

Introduisons un nouveau système de coordonnées :

$$\begin{cases} t' = t'(t) \\ q'_i = q'_i(q, t) \end{cases}$$

On va supposer la transformation infinitésimale puisqu'on considère uniquement des transformations continues finies et, à l'instar des rotations, toute transformation continue finie est un produit de transformations infinitésimales.

On peut donc écrire notre transformation de coordonnées de la façon suivante :

$$\begin{cases} t' = t + \delta t(t) \\ q'_i = q_i + \delta q_i(q, t) \end{cases}$$

où les fonctions δt et δq_i ont été choisies arbitrairement.

Les vitesses \dot{q}_i et \dot{q}'_i sont données par :

$$\begin{cases} \dot{q}_i \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{d}{dt} q_i \\ \dot{q}'_i \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{d}{dt'} q'_i \end{cases}$$

On va exploiter, dans un premier temps, toutes les informations issues de nos transformations de coordonnées.

Soit donc par définition de \dot{q}'_i et q'_i :

$$\dot{q}'_i = \frac{d}{dt'} q'_i = \frac{d}{dt} q'_i \frac{dt}{dt'} = \frac{d}{dt} (q_i + \delta q_i) \frac{dt}{dt'} = \left(\dot{q}_i + \frac{d}{dt} \delta q_i \right) \frac{dt}{dt'} \quad (9.33)$$

Or :

$$\frac{dt'}{dt} = 1 = \frac{dt}{dt'} + \frac{d\delta t}{dt'} \quad (9.34)$$

Soit :

$$1 = \frac{dt}{dt'} + \frac{d\delta t}{dt} \frac{dt}{dt'} \quad (9.35)$$

D'où finalement :

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{1 + \frac{d\delta t}{dt}} \quad (9.36)$$

9.36 dans 9.33 donne alors :

$$\dot{q}_i' = \left(\dot{q}_i + \frac{d}{dt} \delta q_i \right) \frac{1}{1 + \frac{d}{dt} \delta t} \quad (9.37)$$

Pour des transformations infinitésimales, 9.37 devient :

$$\dot{q}_i' = \left(\dot{q}_i + \frac{d}{dt} \delta q_i \right) \left(1 - \frac{d}{dt} \delta t + o(\delta t) \right) \quad (9.38)$$

Soit finalement le résultat suivant issu de nos hypothèses sur les transformations :

$$\delta \dot{q}_i \stackrel{\text{déf.}}{=} \dot{q}_i' - \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i - \dot{q}_i \frac{d}{dt} \delta t \quad (9.39)$$

Puisque, par hypothèse, la physique doit être la même au cours de cette transformation, l'action doit demeurer invariante :

$$S(t_1, t_2) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = S'(t_1, t_2) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{t_1'(t_1)}^{t_2'(t_2)} L'(q_i', \dot{q}_i', t') dt' \quad (9.40)$$

Une condition suffisante est alors :

$$L'(q_i', \dot{q}_i', t') = L(q_i, \dot{q}_i, t) \frac{dt}{dt'} \quad (9.41)$$

Les deux lagrangiens L et L' doivent par hypothèse décrire le même mouvement, *ie* différer seulement d'une dérivée totale par rapport au temps. Cela donne dans le nouveau système de coordonnées :

$$L'(q_i', \dot{q}_i', t') = L(q_i', \dot{q}_i', t') + \frac{d}{dt'} \Omega(q_i', t') \quad (9.42)$$

9.42 dans 9.41 donne :

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \frac{dt}{dt'} = L(q_i', \dot{q}_i', t') + \frac{d}{dt'} \Omega(q_i', t') \quad (9.43)$$

Soit :

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i', \dot{q}_i', t') \frac{dt'}{dt} + \frac{d}{dt} \Omega(q_i', t') \quad (9.44)$$

Or :

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{d}{dt} \delta t \quad (9.45)$$

9.45 dans 9.44 donne :

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i', \dot{q}_i', t') \left(1 + \frac{d}{dt} \delta t \right) + \frac{d}{dt} \Omega(q_i', t') \quad (9.46)$$

D'où :

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) - L(q_i', \dot{q}_i', t') = L(q_i', \dot{q}_i', t') \frac{d}{dt} \delta t + \frac{d}{dt} \Omega(q_i', t') \quad (9.47)$$

Posons :

$$-\delta L = L(q_i, \dot{q}_i, t) - L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t + \delta t) = L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t + \delta t) \frac{d}{dt} \delta t + \frac{d}{dt} \Omega(q_i + \delta q_i, t + \delta t) \quad (9.48)$$

Ce qui donne en ne gardant que les termes du premier ordre :

$$-\delta L = L(q_i, \dot{q}_i, t) - L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t + \delta t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) \frac{d}{dt} \delta t + \frac{d}{dt} \Omega(q_i + \delta q_i, t + \delta t) \quad (9.49)$$

En particulier, si nous choisissons $\delta q_i = 0$ et $\delta t = 0$, et d'après 10.42 il vient $\frac{d\Omega(q_i, t)}{dt} = 0$:

$$-\delta L = L(q_i, \dot{q}_i, t) \frac{d}{dt} \delta t + \frac{d}{dt} \Omega(q_i + \delta q_i, t + \delta t) - \underbrace{\frac{d}{dt} \Omega(q_i, t)}_{=0} \quad (9.50)$$

Soit finalement :

$$-\delta L = L(q_i, \dot{q}_i, t) \frac{d}{dt} \delta t + \frac{d}{dt} \delta \Omega(q_i, t) \quad (9.51)$$

Or par définition de δL :

$$-\delta L = - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \quad (9.52)$$

On égalise alors 9.52 et 9.51 :

$$\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \frac{d}{dt} \delta t = - \frac{d}{dt} \delta \Omega(q, t) \quad (9.53)$$

Pour un choix (q, t) l'équation 9.53 est la traduction de l'hypothèse d'invariance de L par la transformation $(t, q) \mapsto (t'(t), q'(q, t))$.

Explicitons la quantité conservée avec les équations l'Euler-Lagrange pour un système isolé :

$$\forall i, 1 \leq i \leq 3n, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (9.54)$$

qui donnent, insérées dans 9.53 :

$$\frac{d}{dt} (\delta \Omega(q, t)) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + L \delta t - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \delta t = 0 \quad (9.55)$$

Soit finalement :

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) + \delta \Omega(q_i, t) = \text{cste} \quad (9.56)$$

Bilan L'hypothèse d'invariance entraîne bien l'existence d'une quantité conservée et le formalisme lagrangien permet d'explicitier cette quantité (équation 9.56).

Finalement, à chaque fois que les lois de la physique **classique** décrivant un système isolé présentent une symétrie quelconque, il existe une intégrale première du mouvement.

9.6 Références pour le chapitre 9

[Greiner-Müller]

Chapitre 10

Théorème de Wigner et conséquences

J'ai énoncé au chapitre précédent les conséquences des principales invariances en physique classique.

Les propriétés de symétrie jouent un rôle encore plus important en physique quantique : on aboutit en effet à des résultats très généraux sur l'hamiltonien qui mènent à des simplifications importantes.

Avant de parler de ces résultats, je vais m'intéresser dans ce chapitre au théorème de Wigner : celui-ci établit une correspondance entre transformations sur les rayons unitaires et transformations sur les vecteurs de l'espace des états.

Ce théorème me sera utile quand je parlerai des générateurs infinitésimaux dans le chapitre suivant.

10.1 Rayon unitaire de l'espace des états

On se place dans un espace de Hilbert \mathcal{E} . En physique quantique, à un instant t l'état d'un système physique est défini par un vecteur $|\Psi(t)\rangle$ de \mathcal{E} unitaire.

Soit alors :

$$|\Psi'(t)\rangle = e^{i\theta}|\Psi(t)\rangle, \theta \in \mathbb{R} \quad (10.1)$$

On a donc :

$$\langle \Psi'(t) | \Psi'(t) \rangle = |e^{i\theta}| \langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = 1 \quad (10.2)$$

On pose alors la relation d'équivalence suivante sur \mathcal{E} :

$$|\Psi(t)\rangle \mathcal{R} |\Psi'(t)\rangle \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, |\Psi(t)\rangle = e^{i\theta} |\Psi'(t)\rangle \quad (10.3)$$

On vérifie que c'est bien une relation d'équivalence. On pose alors :

$$cl(|\Psi(t)\rangle) = \left\{ |\Psi'(t)\rangle / \exists \theta \in \mathbb{R} |\Psi'(t)\rangle = e^{i\theta} |\Psi(t)\rangle \right\} \quad (10.4)$$

Et on note :

$$cl(|\Psi(t)\rangle) \stackrel{not.}{=} \tilde{\Psi}(t) \quad (10.5)$$

$\tilde{\Psi}(t)$ est appelé rayon unitaire de $|\Psi(t)\rangle$.

$|\Psi(t)\rangle$ et $|\Psi'(t)\rangle = e^{i\theta}|\Psi(t)\rangle$ représentent le même état physique. En effet, en physique quantique, on sait seulement mesurer des probabilités, et :

$$\forall \Phi \in \mathcal{E}, \quad |\langle \Phi | e^{i\theta} \Psi \rangle|^2 = |\langle \Phi | \Psi \rangle|^2 \quad (10.6)$$

Donc, en fait, c'est bien le rayon unitaire $\tilde{\Psi}(t)$ qui est en correspondance biunivoque avec un état du système physique.

On peut alors définir le module du produit scalaire de deux rayons unitaires :

$$\forall \Psi \in \tilde{\Psi}, \forall \Phi \in \tilde{\Phi}, \quad |\langle \tilde{\Psi}, \tilde{\Phi} \rangle| \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} |\langle \Psi, \Phi \rangle| \quad (10.7)$$

Remarques :

(i) Cela a bien un sens puisque :

$$\forall \Psi, \Psi' \in \tilde{\Psi}, \forall \Phi, \Phi' \in \tilde{\Phi}, \quad |\langle \Psi, \Phi \rangle| = |\langle \Psi', \Phi' \rangle| \quad (10.8)$$

(ii) Par contre, on ne peut pas définir le produit scalaire de deux rayons unitaires puisque pour des choix de phase différents, il n'y a pas unicité de la valeur du produit scalaire.

10.2 Théorème de Wigner

Théorème de Wigner : Lorsqu'on applique une transformation g à un système physique, et si l'on traduit la loi de transformation des états physiques par une loi de transformation sur les rayons correspondants :

$$g : \tilde{\Psi} \mapsto g(\tilde{\Psi}) \stackrel{\text{not.}}{=} \Psi_g$$

et que l'on suppose que les probabilités sont invariantes dans cette transformation (*ie* g unitaire) :

$$\forall \Phi, \Psi, \quad |\langle \Phi_g, \Psi_g \rangle| = |\langle \Phi, \Psi \rangle|$$

Alors il est possible de choisir un représentant $|\Psi_g\rangle$ de $\tilde{\Psi}_g$ tel que :

$$\forall \Psi, \quad |\Psi_g\rangle = U(g)|\Psi\rangle$$

où $U(g)$ est un opérateur linéaire unitaire ou anti-linéaire unitaire, unique à un facteur de phase près.

Moralité : La loi de transformation des rayons devient donc une loi de transformation des vecteurs.

Preuve : On se place en dimension finie N . Soit $(\eta_i)_{1 \leq i \leq N}$ une BON de \mathcal{E} .

On considère la transformation T unitaire :

$$\begin{aligned} T : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \\ \tilde{\Psi} &\mapsto T\tilde{\Psi} \end{aligned}$$

Choisissons un représentant η_i'' de $T\tilde{\eta}_i$ et un représentant η_k'' de $T\tilde{\eta}_k$. Alors on a :

$$\forall i, k, \quad 1 \leq i, k \leq N, \quad |\langle \eta_i'', \eta_k'' \rangle| = |\langle \eta_i, \eta_k \rangle| = \delta_{i,k} \quad (10.9)$$

Donc $(\eta_i'')_{1 \leq i \leq N}$ est une BON de \mathcal{E} .

Soit alors :

$$\forall j, 2 \leq j \leq N, \Psi_j = \eta_1 + \eta_j \quad (10.10)$$

On considère $T\tilde{\Psi}_j$ l'image de Ψ_j par T et Ψ_j'' un représentant de $T\tilde{\Psi}_j$, alors :

$$\forall j, 2 \leq j \leq N, |\langle \eta_i'', \Psi_j'' \rangle| = |\langle \eta_i, \Psi_j \rangle| = \|\eta_1\|^2 = 1 \quad (10.11)$$

Et :

$$\forall j, l, 2 \leq j, l \leq N, |\langle \eta_j'', \Psi_l'' \rangle| = |\langle \eta_j, \Psi_l \rangle| = \delta_{lj} \quad (10.12)$$

D'où alors en décomposant Ψ_j'' sur la BON $(\eta_i'')_{1 \leq i \leq N}$:

$$\forall j, 2 \leq j \leq N, \Psi_j'' = c_j \cdot \eta_1'' + d_j \cdot \eta_j'' \quad (10.13)$$

avec :

$$\begin{cases} \forall j, 2 \leq j \leq N, |c_j| = 1 \\ \forall j, 2 \leq j \leq N, |d_j| = 1 \end{cases}$$

On pose alors :

$$\begin{cases} \Psi_j' = \frac{1}{c_j} \Psi_j'', & \forall j, 2 \leq j \leq N \\ \eta_j' = \frac{d_j}{c_j} \eta_j'', & \forall j, 2 \leq j \leq N \\ \eta_1' = \eta_1'' \end{cases}$$

D'où :

$$\forall j, 2 \leq j \leq N, \Psi_j' = \eta_1' + \eta_j' \quad (10.14)$$

avec $\Psi_j', \eta_1', \eta_j'$ représentants de $T\tilde{\Psi}_j, T\tilde{\eta}_1$ et $T\tilde{\eta}_j$.

Bilan : On a défini une application :

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \\ \eta_1 + \eta_j &\mapsto \delta(\eta_1 + \eta_j) \stackrel{\text{déf.}}{=} (\eta_1 + \eta_j)' \end{aligned}$$

telle que, d'après ce qu'on vient de montrer :

$$\forall j, 2 \leq j \leq N, \delta(\eta_1 + \eta_j) = (\eta_1 + \eta_j)' = \eta_1' + \eta_j' \quad (10.15)$$

Montrons que δ est soit linéaire unitaire, soit anti-linéaire unitaire.

Soit Φ dans \mathcal{E} , on peut écrire :

$$\Phi = \sum_{k=1}^N a_k \cdot \eta_k \quad (10.16)$$

Examinons maintenant s'il est possible que Φ se transforme suivant :

$$\delta(\Phi) \stackrel{\text{déf.}}{=} \Phi' = \sum_{k=1}^N a'_k \cdot \eta'_k \quad (10.17)$$

On tire alors les conditions :

$$|\langle \eta'_k | \Phi' \rangle| = |a'_k| = |\langle \eta_k | \Phi \rangle| = |a_k| \quad (10.18)$$

Et :

$$\forall j, 2 \leq j \leq N, |\langle \eta_1 + \eta_j | \Phi \rangle| = |a_1 + a_j| = |\langle (\eta_1 + \eta_j)' | \Phi' \rangle| = |\langle \eta'_1 + \eta'_j | \Phi' \rangle| = |a'_1 + a'_j| \quad (10.19)$$

En posant :

$$\begin{cases} a_1 = |a_1| e^{i\theta_1} \\ a'_1 = |a'_1| e^{i\theta'_1} \\ a_j = |a_j| e^{i\theta_j}, \quad \forall j, 2 \leq j \leq N \\ a'_j = |a'_j| e^{i\theta'_j}, \quad \forall j, 2 \leq j \leq N \end{cases}$$

On obtient après calculs :

$$\forall j, 2 \leq j \leq N, \cos(\theta_1 - \theta_j) = \cos(\theta'_1 - \theta'_j) \quad (10.20)$$

Soit :

$$\begin{cases} \forall j, 2 \leq j \leq N, \theta_1 - \theta_j = \theta'_1 - \theta'_j & \boxed{\text{A}} \\ \text{ou} \\ \forall j, 2 \leq j \leq N, \theta_1 - \theta_j = -(\theta'_1 - \theta'_j) & \boxed{\text{B}} \end{cases}$$

Examinons le cas $\boxed{\text{A}}$. En redéfinissant la phase de Φ' , on peut faire en sorte que :

$$a'_1 = a_1 \implies \theta'_1 = \theta_1 \implies \forall j, 2 \leq j \leq N, \theta'_j = \theta_j \quad (10.21)$$

Et donc :

$$\Phi' = \sum_{k=1}^N a_k \cdot \eta'_k \quad (10.22)$$

Prenons un autre vecteur Γ de \mathcal{E} :

$$\Gamma = \sum_{k=1}^N b_k \cdot \eta_k \quad (10.23)$$

Le même raisonnement amène à :

$$\Gamma' = \sum_{k=1}^N b_k \cdot \eta'_k \quad (10.24)$$

Et donc finalement pour λ et μ complexes quelconques :

$$(\lambda \cdot \Phi + \mu \cdot \Gamma)' = \sum_{k=1}^N (\lambda a_k + \mu b_k)' \cdot \eta'_k = \sum_{k=1}^N (\lambda a_k + \mu b_k) \cdot \eta'_k = \lambda \cdot \Phi' + \mu \cdot \Gamma' \quad (10.25)$$

La transformation δ est donc linéaire, et vu qu'elle est unitaire (T l'est), δ est linéaire unitaire.

Examinons maintenant le cas $\boxed{\text{B}}$: on redéfinit alors la phase de Φ' de telle sorte que :

$$a'_1 = a_1^* \implies \forall j, 2 \leq j \leq N, a'_j = a_j^* \quad (10.26)$$

Et donc :

$$\Phi' = \sum_{k=1}^N a_k^* \cdot \eta'_k \quad (10.27)$$

La transformée de $(\lambda \cdot \Phi + \mu \cdot \Gamma)$, pour λ et μ complexes quelconques :

$$(\lambda \cdot \Phi + \mu \cdot \Gamma)' = \left[\sum_{k=1}^N (\lambda a_k + \mu b_k) \cdot \eta_k \right]' = \lambda^* \cdot \Phi' + \mu^* \cdot \Gamma' \quad (10.28)$$

La transformation δ est donc anti-linéaire, et vu qu'elle est unitaire (T l'est), δ est anti-linéaire unitaire.

Finalement, on a bien montré l'existence d'une transformation sur les vecteurs soit linéaire unitaire, soit anti-linéaire unitaire : le choix de phase effectué dans le raisonnement fixe cet opérateur à un facteur de phase près.

10.3 Conséquences du théorème de Wigner

Le théorème de Wigner a des conséquences remarquables lorsque l'on a affaire à un groupe de transformations G , typiquement un groupe de Lie.

Pout g_1 et g_2 dans G , exploitons le théorème de Wigner avec $g = g_1 \cdot g_2$. On a :

$$|\Psi_g\rangle = U(g)|\Psi\rangle \quad (10.29)$$

Et :

$$|\Psi_g\rangle = U(g_2)|\Psi_{g_1}\rangle = U(g_2)U(g_1)|\Psi\rangle \quad (10.30)$$

Or, $|\Psi_g\rangle$ et $|\Psi_{g_2 \cdot g_1}\rangle$ représentent le même état physique, donc ils diffèrent seulement d'un facteur de phase, soit :

$$|\Psi_g\rangle = e^{i\alpha(g_2, g_1, \Psi)} |\Psi_{g_2 \cdot g_1}\rangle \quad (10.31)$$

Montrons que : $\alpha(g_2, g_1, \Psi) = \alpha(g_2, g_1)$.

Soit un autre vecteur $|\Gamma_g\rangle$ tel que :

$$|\Gamma_g\rangle = e^{i\alpha(g_2, g_1, \Gamma)} |\Gamma_{g_2 \cdot g_1}\rangle \quad (10.32)$$

Alors la transformation g étant unitaire :

$$\langle \Gamma | \Psi \rangle = \langle \Gamma_g | \Psi_g \rangle = e^{i(\alpha(g_2, g_1, \Psi) - \alpha(g_2, g_1, \Gamma))} \langle \Gamma_{g_2 \cdot g_1} | \Psi_{g_2 \cdot g_1} \rangle \quad (10.33)$$

Soit :

$$\langle \Gamma | \Psi \rangle = e^{i(\alpha(g_2, g_1, \Psi) - \alpha(g_2, g_1, \Gamma))} \langle U(g_2)U(g_1)\Gamma | U(g_2)U(g_1)\Psi \rangle \quad (10.34)$$

D'où, U étant unitaire :

$$\langle \Gamma | \Psi \rangle = e^{i(\alpha(g_2, g_1, \Psi) - \alpha(g_2, g_1, \Gamma))} \langle \Gamma | \Psi \rangle \quad (10.35)$$

Finalement :

$$\alpha(g_2, g_1, \Psi) = \alpha(g_2, g_1, \Gamma), \quad \forall \Psi, \Gamma \quad (10.36)$$

D'où le résultat.

On a donc :

$$|\Psi_g\rangle = e^{i\alpha(g_2, g_1)} |\Psi_{g_2, g_1}\rangle \quad (10.37)$$

Soit :

$$U_g |\Psi\rangle = e^{i\alpha(g_2, g_1)} U_{g_2} U_{g_1} |\Psi_{g_2, g_1}\rangle, \quad \forall \Psi \quad (10.38)$$

Ce qui donne :

$$U_g = e^{i\alpha(g_2, g_1)} U_{g_2} U_{g_1} \quad (10.39)$$

Bilan Les opérateurs U forment une représentation dite projective du groupe G .
Pour le cas $e^{i\alpha(g_2, g_1)} = 1$, on retrouve les représentations de groupes de Lie étudiées dans le chapitre 7.
Le cas $e^{i\alpha(g_2, g_1)} = 1$ ou -1 lorsqu'il s'agit du groupe $\mathcal{SO}(3)$ donne les représentations dites spinorielles.
Finalement, l'étude des transformations unitaires d'un système physique, c'est à dire l'étude des transformations qui laissent invariantes les probabilités, se ramène à l'étude des représentations du groupe de transformations.

10.4 Références pour le chapitre 10

[Le Bellac]

Chapitre 11

Théorème de Noether, générateurs infinitésimaux et lois de conservation en physique quantique

Le but de ce chapitre est d'aboutir à des lois de conservation analogues à celles obtenues en physique classique.

Pour cela, je m'intéresse à trois groupes de transformations particuliers : le groupe des translations de temps et d'espace, et le groupe des rotations.

Le concept clef est celui de générateur infinitésimal : c'est lui qui va faire le lien entre invariance et lois de conservation. Je vais en effet montrer que le générateur infinitésimal d'une transformation qui est liée à la conservation d'une certaine quantité en physique classique est précisément l'opérateur lié à cette propriété en physique quantique.

Le cadre dans lequel on se placera est, je rappelle, un espace-temps isotrope et homogène spatialement et temporellement.

11.1 Générateurs infinitésimaux

11.1.1 Généralités

On distingue deux groupes de transformations :

- les groupes discrets dont le nombre d'éléments est fini ou dénombrable. On peut citer par exemple l'opération parité, qui change le signe des coordonnées
- les groupes continus, dont les éléments sont paramétrés par un ou plusieurs paramètres variant de façon continue. Par exemple, la rotation $R_z(\theta)$ autour de O_z est paramétrée par l'angle θ qui varie de façon continue de 0 à 2π .

Les groupes continus intéressants en physique sont précisément les groupes de Lie, que j'ai étudiés dans la seconde partie : par exemple, le groupe de Lie $\mathcal{SO}(3)$ des isométries de l'espace euclidien à 3 dimensions. C'est un groupe à 3 paramètres : 2 paramètres angulaires pour fixer l'axe de rotation dans un référentiel $Oxyz$ et un troisième pour l'angle de rotation.

Le groupe des rotations possède une infinité de sous-groupes abéliens, les rotations autour d'un axe fixe. En fait, et ceci est très naturel, l'étude de $\mathcal{SO}(3)$ peut se ramener à l'étude des trois sous-groupes abéliens correspondant aux rotations autour de O_x , O_y et O_z : autrement dit, l'étude de l'espace vectoriel $\mathcal{SO}(3)$ se ramène à l'étude des 3 matrices de rotation indépendantes

autour de O_x , O_y et O_z qui forment une base de $\mathcal{SO}(3)$.

Ces rotations sont paramétrées par un angle θ qui est un paramètre additif : le produit de deux rotations d'angle θ_1 et θ_2 est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

Plus généralement, si un groupe de Lie (G, \cdot) est paramétré par n paramètres indépendants (*ie* si le groupe de Lie est de dimension n) alors l'étude de celui-ci pourra se ramener à l'étude de n sous-groupes abéliens (*ie* pourra se ramener à l'étude de ses n vecteurs de base).

Considérons un sous-groupe abélien de G qui soit un groupe de transformations sur les états d'un système physique, c'est à dire sur les rayons unitaires. Supposons que ses éléments h soient paramétrés à l'aide d'un paramètre additif α , autrement dit que $\alpha \mapsto h(\alpha)$ soit un sous-groupe à un paramètre de G :

$$\forall h \in G, h(\alpha_1 + \alpha_2) = h(\alpha_1).h(\alpha_2) \quad (11.1)$$

D'après le théorème de Wigner, cela se traduit sur les vecteurs d'états par une transformation U unitaire :

$$\forall h \in G, \hat{U}(h(\alpha_1 + \alpha_2)) = \hat{U}(h(\alpha_1)).\hat{U}(h(\alpha_2)) \quad (11.2)$$

que l'on va noter plus simplement :

$$\forall h \in G, \hat{U}_h(\alpha_1 + \alpha_2) = \hat{U}_h(\alpha_1).\hat{U}_h(\alpha_2) \quad (11.3)$$

On sait alors (cf 7.3 Sous-groupe à un paramètre) qu'il existe un opérateur hermitien \hat{T}_h (puisque les transformations U sont unitaires d'après le théorème de Wigner) tel que :

$$\forall h \in G, \hat{U}_h(\alpha) = \exp(-i\alpha.\hat{T}_h) \quad (11.4)$$

Le but des prochains paragraphes est d'explicitier le générateur infinitésimal \hat{T}_h dans le cas des rotations et des translations spatiales et temporelles. \hat{T}_h étant hermitien, c'est un bon candidat pour être un opérateur lié à une propriété physique...

Remarque En fait, on écrira plutôt :

$$\forall h \in G, \hat{U}_h(\alpha) = \exp(-\frac{i}{\hbar}\alpha.\hat{T}_h) \quad (11.5)$$

de sorte que \hat{T}_h ait bien l'unité de la propriété physique qu'il représente.

11.1.2 Un mot sur les opérateurs

En physique quantique, il existe un principe de correspondance entre opérateurs sur l'espace des états et propriétés physiques : un des 6 postulats affirme en effet que :

Toute grandeur physique mesurable \mathcal{A} est décrite par un opérateur \hat{A} de \mathcal{E} vers \mathcal{E} , où \mathcal{E} est l'espace des états du système physique (espace de Hilbert).

Exemples :

Energie E	\longleftrightarrow	Hamiltonien \hat{H}
Impulsion \vec{p}	\longleftrightarrow	Opérateur impulsion $\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{P}_x \\ \hat{P}_y \\ \hat{P}_z \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf.}}{=} -i\hbar\vec{\nabla}$
Position \vec{r}	\longleftrightarrow	Opérateur position $\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{R}_x \\ \hat{R}_y \\ \hat{R}_z \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Moment cinétique \vec{J}	\longleftrightarrow	Opérateur moment cinétique $\hat{J} = \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf.}}{=} \hat{R} \wedge \hat{P}$

Remarque : On vérifie aisément que \hat{P} , \hat{R} , \hat{J} et \hat{H} sont des opérateurs hermitiens.

11.1.3 Générateurs infinitésimaux des translations spatiales

Considérons un état défini par la fonction d'onde $\Psi_\alpha(\vec{r}, t)$, ie par le ket $|\alpha(t)\rangle$ représentant quelconque du rayon unitaire $\tilde{\alpha}(t)$.

On considère alors l'état déplacé par la quantité \vec{a} défini par la fonction d'onde $\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t)$:

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_{\alpha'}(\vec{r} + \vec{a}, t) = \Psi_\alpha(\vec{r}, t) \quad (11.6)$$

En physique quantique, dans le cadre des espaces de Hilbert, on rencontre deux types de transformation :

$$\Phi_\mu(\vec{r}, t) = \sum_n S_{n\mu} \Psi_n(\vec{r}, t) \quad (11.7)$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}} \Psi(\vec{r}, t_0) \quad (11.8)$$

11.7 est une transformation de la base vectorielle $(\Psi_n(\vec{r}, t))_n$ vers une base $(\Phi_\mu(\vec{r}, t))_\mu$. Ceci revient à décrire une transformation de coordonnées (rotation des axes) dans l'espace de Hilbert.

11.8, quant à elle, conserve les axes et change le vecteur $\Psi(\vec{r}, t_0)$ initial en le vecteur $\Psi(\vec{r}, t)$ par une rotation généralisée du vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ de l'espace de Hilbert.

Dans notre cas, il s'agira de transformations du second type. Etant donné que la translation du vecteur d'état dans l'espace des positions est une isométrie, on va considérer un opérateur de translation unitaire (on le vérifiera a posteriori).

Soit donc l'opérateur $\hat{U}_r(\vec{a})$ de translation d'une quantité \vec{a} :

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = \hat{U}_r(\vec{a})\Psi_{\alpha}(\vec{r}, t) \quad (11.9)$$

où :

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = \Psi_{\alpha}(\vec{r} - \vec{a}, t) \quad (11.10)$$

Par un développement de Taylor en supposant par exemple $\vec{a} = \|\vec{a}\| \hat{e}_x \stackrel{not.}{=} a \cdot \hat{e}_x$:

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_{\alpha}(\vec{r} - \vec{a}, t) = \Psi_{\alpha}(x - a, y, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \Psi_{\alpha}(x, y, z, t) \quad (11.11)$$

Soit :

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_{\alpha}(x - a, y, z, t) = e^{-a \frac{\partial}{\partial x}} \Psi_{\alpha}(x, y, z, t) \quad (11.12)$$

Si on s'intéresse maintenant au cas général, $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_x + a_2 \cdot \vec{e}_y + a_3 \cdot \vec{e}_z = a \cdot \hat{a}$, où \hat{a} est un vecteur unitaire :

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_{\alpha}(\vec{r} - \vec{a}, t) = \Psi_{\alpha}(x - a_1, y - a_2, z - a_3, t) \quad (11.13)$$

Un développement de Taylor en dimension 3 donne alors :

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_{\alpha}(x - a_1, y - a_2, z - a_3, t) = e^{-\vec{a} \cdot \vec{\nabla}} \Psi_{\alpha}(x, y, z, t) \quad (11.14)$$

On introduit alors l'opérateur impulsion \hat{P} présenté au paragraphe 12.1.2 :

$$\hat{P} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (11.15)$$

D'où finalement :

$$\hat{U}_r(\vec{a}) = e^{-\frac{i\hat{P} \cdot \vec{a}}{\hbar}}$$

Vérifions que $\hat{U}_r(\vec{a})$ est unitaire :

$$\hat{U}_r^{-1}(\vec{a}) = e^{\frac{i\hat{P} \cdot \vec{a}}{\hbar}} \quad (11.16)$$

Or \hat{P} est hermitien ($\hat{P}^* = \hat{P}$) donc :

$$\hat{U}_r^{-1}(\vec{a}) = e^{\frac{i\hat{P} \cdot \vec{a}}{\hbar}} = [e^{-\frac{i\hat{P} \cdot \vec{a}}{\hbar}}]^* = [e^{-\frac{i\hat{P} \cdot \vec{a}}{\hbar}}]^* = \hat{U}_r^*(\vec{a}) \quad (11.17)$$

Bilan Le générateur infinitésimal des translations spatiales d'une quantité \vec{a} est $T_{\hbar} = \hat{P} \cdot \hat{a}$, la composante suivant \hat{a} de l'impulsion \hat{P} .
L'opérateur lié aux translations spatiales en physique quantique est donc l'opérateur qui correspond à la quantité de mouvement : ceci est analogue à la situation rencontrée en physique classique où la quantité de mouvement était liée aux translation spatiales dans les lois de conservation.

11.1.4 Générateurs infinitésimaux des translations temporelles

On reprend les mêmes notations que précédemment, en considérant la fonction d'onde $\Psi_\alpha(\vec{r}, t)$. La fonction d'onde obtenue par translation temporelle d'une quantité τ est noté $\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t)$:

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t + \tau) = \Psi_\alpha(\vec{r}, t) \quad (11.18)$$

On note $\hat{U}_t(\tau)$ l'opérateur associé :

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = \hat{U}_t(\tau)\Psi_\alpha(\vec{r}, t) = \Psi_\alpha(\vec{r}, t - \tau) \quad (11.19)$$

Un développement de Taylor donne alors :

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_\alpha(\vec{r}, t - \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \Psi_\alpha(x, y, z, t) = e^{-\tau \frac{\partial}{\partial t}} \Psi_\alpha(x, y, z, t) \quad (11.20)$$

Soit donc :

$$\hat{U}_t(\tau) = e^{-\tau \frac{\partial}{\partial t}} \quad (11.21)$$

On introduit alors l'hamiltonien \hat{H} :

$$\hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (11.22)$$

Ainsi on obtient l'expression de l'opérateur de translation temporelle en fonction de l'hamiltonien :

$$\hat{U}_t(\tau) = e^{\frac{i}{\hbar} \tau \hat{H}}$$

Vérifions que $\hat{U}_t(\tau)$ est unitaire, sachant que \hat{H} est hermitien :

$$\hat{U}_t(\tau)^* = e^{-\frac{i}{\hbar} \tau \hat{H}^*} = e^{-\frac{i}{\hbar} \tau \hat{H}} = \hat{U}_t(\tau)^{-1} \quad (11.23)$$

Bilan Le générateur infinitésimal des translations temporelles d'une quantité τ est, à un facteur moins près, l'hamiltonien \hat{H} .

L'opérateur lié aux translations temporelles en physique quantique est donc l'opérateur qui correspond à l'énergie : ceci est analogue à la situation rencontrée en physique classique où l'énergie était liée aux translations temporelles dans les lois de conservation.

11.1.5 Générateurs infinitésimaux des rotations

Considérons une rotation infinitésimale d'axe \hat{u} et d'angle $\delta\Phi$. Elle peut donc s'écrire (cf. chapitre 8) :

$$\text{Rot}(\hat{u}, \delta\Phi) = \text{Id} + \delta\Phi_x \cdot \eta_1 + \delta\Phi_y \cdot \eta_2 + \delta\Phi_z \cdot \eta_3$$

Soit en notant \vec{r} le vecteur initial, \vec{r}' le vecteur après rotation, et plus simplement R la rotation :

$$\vec{r}' = R\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\Phi_z & \delta\Phi_y \\ \delta\Phi_z & 1 & -\delta\Phi_x \\ -\delta\Phi_y & \delta\Phi_x & 1 \end{pmatrix} \vec{r}$$

Considérons un état défini par la fonction d'onde $\Psi_\alpha(\vec{r}, t)$ et l'état après rotation défini par la fonction d'onde $\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t)$.

En notant $\hat{U}_R(\delta\vec{\Phi} = \delta\Phi\hat{u})$ l'opérateur de rotation, il vient :

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = \hat{U}_R(\delta\vec{\Phi})\Psi_\alpha(\vec{r}, t) \quad (11.24)$$

Soit :

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = \Psi_\alpha(R^{-1}\vec{r}, t) \quad (11.25)$$

On a donc :

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = \Psi_\alpha(\vec{r} - \delta\vec{\Phi} \wedge \vec{r}, t) \simeq \Psi_\alpha(\vec{r}, t) - (\delta\vec{\Phi} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \Psi_\alpha(\vec{r}, t) \quad (11.26)$$

D'où en introduisant l'opérateur \hat{P} :

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = \Psi_\alpha(\vec{r}, t) - \frac{i}{\hbar} (\delta\vec{\Phi} \wedge \vec{r}) \cdot \hat{P} \Psi_\alpha(\vec{r}, t) \quad (11.27)$$

Et donc en introduisant l'opérateur $\hat{J} = \hat{R} \wedge \hat{P}$:

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = (\text{Id} - \frac{i}{\hbar} \delta\vec{\Phi} \cdot \hat{J}) \Psi_\alpha(\vec{r}, t) \quad (11.28)$$

On obtient finalement :

$$\hat{U}_R(\delta\vec{\Phi}) = \text{Id} - \frac{i}{\hbar} \delta\vec{\Phi} \cdot \hat{J} \quad (11.29)$$

On va maintenant s'intéresser aux rotations finies, produit de rotations infinitésimales.

Choisissons nos coordonnées telles que l'axe O_x soit l'axe de rotation. Combinons alors une rotation finie et une rotation infinitésimale d'axes O_x :

$$\hat{U}_R(\vec{\Phi}_x + \delta\vec{\Phi}_x) = \hat{U}_R(\delta\vec{\Phi}_x) \hat{U}_R(\vec{\Phi}_x) = (\text{Id} - \frac{i}{\hbar} \delta\vec{\Phi}_x \cdot \hat{J}) \hat{U}_R(\vec{\Phi}_x) \quad (11.30)$$

Soit alors vu que $\delta\vec{\Phi}_x \cdot \hat{J} = \delta\Phi_x \hat{J}_x$:

$$\frac{\delta \hat{U}_R(\vec{\Phi}_x)}{\delta \Phi_x} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\hat{U}_R(\vec{\Phi}_x + \delta\Phi_x) - \hat{U}_R(\vec{\Phi}_x)}{\delta \Phi_x} = -\frac{i}{\hbar} \hat{J}_x \hat{U}_R(\vec{\Phi}_x) \quad (11.31)$$

Quand $\delta\Phi_x \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial \hat{U}_R(\vec{\Phi}_x)}{\partial \Phi_x} = -\frac{i}{\hbar} \hat{J}_x \hat{U}_R(\vec{\Phi}_x) \quad (11.32)$$

On a les mêmes résultats suivant O_y et O_z .

Soit, par intégration avec comme condition initiale $\hat{U}_R(0) = \text{Id}$:

$$\hat{U}_R(\vec{\Phi}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \Phi \cdot \hat{J} \cdot \hat{u}}$$

Vérifions que $\hat{U}_R(\vec{\Phi})$ est unitaire :

$$\hat{U}_R^{-1}(\vec{\Phi}) = e^{\frac{i}{\hbar} \Phi \cdot \hat{J} \cdot \hat{u}} \quad (11.33)$$

Or \hat{J} est hermitien ($\hat{J}^* = \hat{J}$) donc :

$$\hat{U}_R^{-1}(\vec{\Phi}) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\Phi}\hat{J}\cdot\hat{u}} = [e^{-\frac{i\hat{J}\cdot\vec{\Phi}}{\hbar}}]^* = [e^{-\frac{i\hat{J}\cdot\vec{\Phi}}{\hbar}}]^* = \hat{U}_R^*(\vec{\Phi}) \quad (11.34)$$

Bilan Le générateur infinitésimal des rotations est $T_h = \hat{J}\cdot\hat{u}$, la composante suivant \hat{u} du moment \hat{J} .

L'opérateur lié aux rotations en physique quantique est donc l'opérateur qui correspond au moment cinétique : ceci est analogue à la situation rencontrée en physique classique où le moment cinétique était lié aux rotations dans les lois de conservation.

11.2 Théorème de Noether et lois de conservation en physique quantique

11.2.1 Equation de Schrödinger et évolution de la valeur moyenne d'un observable

L'évolution dans le temps d'un vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ est régie par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle \quad (11.35)$$

où $\hat{H}(t)$ est l'hamiltonien du système.

Dans le cas où \hat{H} ne dépend pas du temps, on a alors :

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}t \cdot \hat{H}} |\Psi(t_0)\rangle \quad (11.36)$$

Remarque : La donnée de l'état initial $|\Psi(t_0)\rangle$ suffit à déterminer $|\Psi(t)\rangle$ à un instant ultérieur t quelconque.

Entre deux mesures, le vecteur d'état évolue donc de façon parfaitement déterministe.

Soit \hat{A} un observable. Si l'état $|\Psi(t)\rangle$ est normé alors la valeur moyenne de l'observable \hat{A} à t vaut :

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle \quad (11.37)$$

Théorème : L'évolution de la moyenne de l'observable \hat{A} est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle(t) = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}(t)] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle$$

Preuve :

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle = \left[\frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \right] \hat{A} | \Psi(t) \rangle + \langle \Psi(t) | \hat{A} \left[\frac{d}{dt} | \Psi(t) \rangle \right] + \langle \Psi(t) | \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} | \Psi(t) \rangle$$

Utilisons maintenant l'équation de Schrödinger :

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle = -\frac{1}{i\hbar} \langle \Psi(t) | \hat{H} \hat{A} | \Psi(t) \rangle + \langle \Psi(t) | -\frac{i}{\hbar} \hat{A} \hat{H} | \Psi(t) \rangle + \langle \Psi(t) | \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} | \Psi(t) \rangle$$

Soit finalement :

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}(t)] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle$$

11.2.2 Invariance par translation spatiale

On reprend les notations des paragraphes précédents. L'état $\Psi_\alpha(\vec{r}, t)$ est transformé en $\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t)$ par translation spatiale d'une quantité \vec{a} :

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = \hat{U}_r(\vec{a})\Psi_\alpha(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i\vec{a}}{\hbar}\hat{P}}\Psi_\alpha(\vec{r}, t) \quad (11.38)$$

$\Psi_\alpha(\vec{r}, t)$ satisfait à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_\alpha(\vec{r}, t) = \hat{H}(t)\Psi_\alpha(\vec{r}, t) \quad (11.39)$$

Si on suppose l'espace homogène, c'est à dire que tous les états déplacés satisfont aux mêmes lois physiques, alors en particulier $\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t)$ satisfait à la même équation de Schrödinger que $\Psi_\alpha(\vec{r}, t)$:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = \hat{H}(t)\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) \quad (11.40)$$

Or on a :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\hat{U}_r(\vec{a})\Psi_\alpha(\vec{r}, t)) = \hat{U}_r(\vec{a})i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_\alpha(\vec{r}, t) = \hat{U}_r(\vec{a})\hat{H}(t)\Psi_\alpha(\vec{r}, t) \quad (11.41)$$

Soit :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = \hat{U}_r(\vec{a})\hat{H}(t)\hat{U}_r^{-1}(\vec{a})\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) \quad (11.42)$$

Et donc $\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t)$ vérifie la même équation de Schrödinger que $\Psi_\alpha(\vec{r}, t)$ si et seulement si :

$$\hat{U}_r(\vec{a})\hat{H}(t)\hat{U}_r^{-1}(\vec{a}) = \hat{H}(t) \quad (11.43)$$

Ce qui est équivalent à :

$$[\hat{H}(t)\hat{U}_r(\vec{a})] = [\hat{H}(t), e^{-\frac{i\vec{a}}{\hbar}\hat{P}}] = 0 \quad (11.44)$$

Le choix de \vec{a} étant arbitraire on aboutit à :

$$[\hat{H}(t), \hat{P}] = 0 \quad (11.45)$$

Le théorème d'évolution de la valeur moyenne donne :

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{P}\rangle(t) = \underbrace{\frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{P}, \hat{H}(t)]\rangle}_{=0} + \underbrace{\left\langle\frac{\partial\hat{P}}{\partial t}\right\rangle}_{\hat{P} \text{ indépendant de } t \text{ donc } =0} \quad (11.46)$$

Soit finalement :

$$\boxed{\langle\hat{P}\rangle = \text{cste}}$$

Bilan Ainsi, si l'état $\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t)$ satisfait à la même équation de Schrödinger que $\Psi_{\alpha}(\vec{r}, t)$ alors la valeur moyenne de l'impulsion est une constante : l'homogénéité de l'espace, c'est à dire la symétrie des lois de la nature vis-à-vis des translations spatiales, engendre la conservation de $\langle \hat{P} \rangle(t)$.

Des quantons libres sont des exemples de tels systèmes, où l'espace est homogène. Mais cette symétrie sera perdue lorsqu'une force sera introduite : par exemple un quanton dans un potentiel localisé.

On retrouve donc en physique quantique le lien bien connu en physique classique entre invariance par translation spatiale et conservation de la quantité de mouvement : mais, ici, c'est la valeur moyenne qui est conservée.

11.2.3 Invariance par translation temporelle

L'état $\Psi_{\alpha}(\vec{r}, t)$ est transformé en $\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t)$ par translation temporelle d'une quantité τ :

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = \hat{U}_t(\tau) \Psi_{\alpha}(\vec{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}} \Psi_{\alpha}(\vec{r}, t) \quad (11.47)$$

$\Psi_{\alpha}(\vec{r}, t)$ satisfait à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\alpha}(\vec{r}, t) = \hat{H}(t) \Psi_{\alpha}(\vec{r}, t) \quad (11.48)$$

Si on suppose l'écoulement du temps uniforme, c'est à dire que tous les états déplacés satisfont les mêmes lois physiques, alors en particulier $\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t)$ satisfait à la même équation de Schrödinger que $\Psi_{\alpha}(\vec{r}, t)$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = \hat{H}(t) \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) \quad (11.49)$$

Mais on a aussi :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = \hat{H}(t - \tau) \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) \quad (11.50)$$

On en déduit donc immédiatement que \hat{H} est indépendant du temps et qu'il y a conservation de l'énergie.

Bilan Ainsi, si l'état $\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t)$ satisfait à la même équation de Schrödinger que $\Psi_{\alpha}(\vec{r}, t)$ alors l'énergie est une constante : l'homogénéité de l'écoulement du temps, c'est à dire la symétrie des lois de la nature vis-à-vis des translations temporelles, engendre la conservation de l'énergie.

On retrouve donc en physique quantique le lien bien connu en physique classique entre invariance par translation temporelle et conservation de l'énergie.

11.2.4 Invariance par rotation

L'état $\Psi_{\alpha}(\vec{r}, t)$ est transformé en $\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t)$ par rotation R d'axe \hat{u} et d'angle Φ :

$$\forall \vec{r}, \forall t, \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = \hat{U}_R(\vec{\Phi}) \Psi_{\alpha}(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i\Phi}{\hbar} \hat{J} \cdot \hat{u}} \Psi_{\alpha}(\vec{r}, t) \quad (11.51)$$

$\Psi_{\alpha}(\vec{r}, t)$ satisfait à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\alpha}(\vec{r}, t) = \hat{H}(t) \Psi_{\alpha}(\vec{r}, t) \quad (11.52)$$

Si on suppose l'espace isotrope, c'est à dire que tous les états après rotation satisfont aux mêmes lois physiques, alors en particulier $\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t)$ satisfait à la même équation de Schrödinger que $\Psi_{\alpha}(\vec{r}, t)$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = \hat{H}(t) \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) \quad (11.53)$$

Or on a :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\hat{U}_R(\vec{\Phi})) \Psi_{\alpha}(\vec{r}, t) = \hat{U}_R(\vec{\Phi}) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\alpha}(\vec{r}, t) = \hat{U}_R(\vec{\Phi}) \hat{H}(t) \Psi_{\alpha}(\vec{r}, t) \quad (11.54)$$

Soit :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = \hat{U}_R(\vec{\Phi}) \hat{H}(t) \hat{U}_R^{-1}(\vec{\Phi}) \Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) \quad (11.55)$$

Et donc $\Psi_{\alpha'}(\vec{r}, t)$ vérifie la même équation de Schrödinger que $\Psi_{\alpha}(\vec{r}, t)$ si et seulement si :

$$\hat{U}_R(\vec{\Phi}) \hat{H}(t) \hat{U}_R^{-1}(\vec{\Phi}) = \hat{H}(t) \quad (11.56)$$

Ce qui est équivalent à :

$$[\hat{H}(t) \hat{U}_R(\vec{\Phi})] = [\hat{H}(t), e^{-\frac{i\Phi}{\hbar} \hat{J} \cdot \hat{u}}] = 0 \quad (11.57)$$

Le choix de \hat{u} étant arbitraire on aboutit à :

$$[\hat{H}(t), \hat{J}] = 0 \quad (11.58)$$

Le théorème d'évolution de la valeur moyenne donne :

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{J} \rangle(t) = \underbrace{\frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{J}, \hat{H}(t)] \rangle}_{= 0} + \underbrace{\left\langle \frac{\partial \hat{J}}{\partial t} \right\rangle}_{\hat{J} \text{ indépendant de } t \text{ donc } = 0} \quad (11.59)$$

Soit finalement :

$$\langle \hat{J} \rangle = \text{cste}$$

Bilan L'isotropie de l'espace, c'est à dire la symétrie des lois de la nature vis-à-vis des rotations, engendre la conservation de $\langle \hat{J} \rangle$.

Des quantons libres sont des exemples de tels systèmes. Un champ de forces peut être présent mais seulement s'il ne présente pas de direction privilégiée : c'est à dire un champ à symétrie sphérique. Dans le cas contraire, l'isotropie sera perdue et la symétrie brisée.

Enfin, comme en physique classique, la conservation du moment cinétique est liée à l'invariance par rotation : mais, ici, c'est la valeur moyenne qui est conservée.

11.2.5 Théorème de Noether en physique quantique

Le théorème de Noether démontré en physique classique existe également en physique quantique. Il généralise les résultats énoncés précédemment en s'intéressant à des transformations continues quelconques.

On a vu au paragraphe 11.1.1 que les transformations intéressantes en physique sont les transformations unitaires :

$$\hat{U}_h(\alpha) = e^{-i\alpha\hat{T}_h} \quad (11.60)$$

pour h élément d'un groupe de Lie G , et avec \hat{T}_h un opérateur hermitien. Ce sont les seules transformations continues que l'on considérera.

On va démontrer le théorème suivant :

Théorème de Noether : Si les lois de la physique sont invariantes dans une transformation continue finie alors il existe un observable dont la moyenne est constante. Cet observable est précisément le générateur infinitésimal de la symétrie.

Soit \hat{S} une transformation de paramètre α unitaire qui laisse invariantes les lois de la physique. En vertu de ce qui a été dit plus haut, on peut écrire :

$$\hat{S}(\alpha) = e^{-i\alpha\hat{G}} \quad (11.61)$$

avec \hat{G} un opérateur hermitien, générateur infinitésimal de la transformation \hat{S} .

Considérons un état $|\Psi(t)\rangle$ et l'état après transformation $|\Psi'(t)\rangle$:

$$|\Psi'(t)\rangle = \hat{S}(\alpha)|\Psi(t)\rangle \quad (11.62)$$

$|\Psi(t)\rangle$ et $|\Psi'(t)\rangle$ doivent vérifier les mêmes lois de la physique et, en particulier, la même équation de Schrödinger. On a donc :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle \quad (11.63)$$

Et :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi'(t)\rangle = \hat{H}(t)|\Psi'(t)\rangle = \hat{H}(t)\hat{S}(\alpha)|\Psi(t)\rangle \quad (11.64)$$

Mais on a également :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi'(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{S}(\alpha)|\Psi(t)\rangle = \hat{S}(\alpha)\hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle \quad (11.65)$$

En égalisant, on aboutit à :

$$\hat{H}(t)\hat{S}(\alpha) = \hat{S}(\alpha)\hat{H}(t) \quad (11.66)$$

Soit :

$$[\hat{H}(t), \hat{S}(\alpha)] = 0 \quad (11.67)$$

Et donc :

$$[\hat{H}(t), \hat{G}] = 0 \quad (11.68)$$

Le théorème d'évolution de la valeur moyenne donne alors :

$$\langle \hat{G} \rangle = \text{cste} \quad (11.69)$$

Bilan : L'existence d'une symétrie continue, c'est à dire d'une transformation continue qui laisse invariante les lois de la physique, engendre l'existence d'une quantité conservée. Le théorème de Noether énoncé en physique classique se généralise donc à la physique quantique.

11.3 Références pour le chapitre 11

[Greiner-Müller], [Le Bellac], [Cohen-Tannoudji] et [Feynman].

Conclusion et discussion

L'objet de ce PIR était d'étudier les symétries en physique : j'ai montré que les lois de conservation obtenues en physique classique étaient encore valables en physique quantique.

Le théorème central de mon exposé est le théorème de Noether : pour un système isolé, à chaque symétrie des lois de la physique correspond une quantité conservée. Je l'ai d'abord démontré en physique classique puis j'ai montré qu'il était toujours valable en physique quantique en utilisant des résultats sur les générateurs infinitésimaux issus de la théorie des groupes de Lie.

Une interprétation pertinente de l'étude des lois de conservation est de concevoir celles-ci comme conséquences directes du déterminisme : à chaque symétrie correspond, en effet, une loi particulière. Ainsi, à une cause donnée, on associe une conséquence unique : il s'agit bien là de déterminisme.

Ma démarche a été de se placer dans un référentiel donné puis d'explicitier les conséquences de l'invariance des lois de la physique sous l'action de certaines transformations géométriques. Une autre démarche aurait consisté à faire des changements de référentiel et voir quels changements laissent invariantes les lois de la physique. On aboutit bien sûr aux transformations de Lorentz et Galilée, cette dernière étant valable quand $v/c \rightarrow 0$. C'est évidemment la transformation de Lorentz que l'on doit choisir en général mais on ne peut alors éviter le cadre de la théorie quantique des champs.

Une autre application en physique quantique de la théorie des groupes de Lie est le modèle mathématique des quarks. Il utilise les représentations du groupe de Lie $SU(3)$. On montre que celles-ci sont en correspondance bijective avec celles de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. On travaille alors sur la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de dimension 2 de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$: les quarks sont les vecteurs poids de la représentation dite standard de \mathfrak{h} .

Je souhaite remercier encore une fois mes encadrants de PIR pour leur contribution précieuse à mon travail, et pour leur soutien.

Toulouse, juin 2010

Bibliographie

[Alessandri] Michel Alessandri, *Thèmes de géométrie*, édition Dunod, 1999.

[Alessandri 2] Cours de mathématiques de MPSI et devoirs maisons.

[Cohen-Tannoudji] Claude Cohen-Tannoudji, *Mécanique quantique*, édition Hermann, 1973.

[Feynman] Richard Feynman, *Mécanique quantique*, édition Dunod, 2000.

[Greiner-Müller] Walter Greiner et Berndt Müller, *Mécanique quantique : Symétries*, édition Springer, 1999.

[Kosmann-Schwarzbach] Yvette Kosmann-Schwarzbach, *Groupes et symétries*, éditions de l'école Polytechnique, 2003.

[Le Bellac] Michel Le Bellac, *Physique quantique*, CNRS éditions, 2007.

[Lévy-Leblond] Jean-Marc Lévy-Leblond, *Quantique : Rudiments*, édition Dunod, 2006.