

PROJET D'INITIATION À LA RECHERCHE - 2A

GÉOMÉTRIE PSEUDO-RIEMANNIENNE ET
RELATIVITÉ GÉNÉRALE



30 JUIN 2011

AUTEURS :
HADRIEN MONTANELLI
OLIVIER MARTRE

PROFESSEURS ENCADRANT :
M. CHRISTIAN TEICHTIL
M. XAVIER CLAEYS

Table des matières

Introduction	7
I Eléments de calcul tensoriel dans les espaces ponctuels euclidiens	11
1 Contravariance et covariance : dualité dans un espace vectoriel	13
1.1 Conventions	13
1.1.1 Notation d'Einstein	13
1.1.2 Notation d'indice primé	14
1.2 Vecteurs contravariants et covariants d'un espace vectoriel	14
1.2.1 Vecteurs contravariants : les vecteurs de E_n	14
1.2.2 Vecteurs covariants : les vecteurs de E_n^*	15
1.3 Passage aux espaces vectoriels euclidiens	16
1.3.1 Réécriture du produit scalaire	16
1.3.2 Composantes covariantes d'un vecteur contravariant	16
1.3.3 Expressions du produit scalaire en fonction des composantes contravariantes et covariantes	16
1.3.4 Relations entre composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur contravariant	17
2 Les espaces ponctuels euclidiens	19
2.1 Définitions	19
2.1.1 Espace ponctuel euclidien	19
2.1.2 Repères d'un espace ponctuel	20
2.2 Calcul différentiel dans un espace ponctuel euclidien	20
2.2.1 Notation indicielle des dérivées partielles	20
2.2.2 Coordonnées curvilignes	21
2.2.3 Repère naturel	21
2.2.4 Élément linéaire et distance	22
2.2.5 Calcul effectif en coordonnées polaires et en coordonnées sphériques	22
3 Analyse tensorielle	25
3.1 Définition analytique des tenseurs	25
3.1.1 Changement de base d'un repère naturel	25
3.1.2 Définition des tenseurs d'ordre 2	27
3.1.3 Définition des tenseurs d'ordre quelconque	28
3.2 Opération sur les tenseurs	28
3.2.1 Passage des coordonnées contravariantes aux coordonnées covariantes	28
3.2.2 Contraction des indices et multiplication contractée	29

3.2.3	Critère de tensorialité	29
3.3	Symboles de Christoffel	30
3.3.1	Définitions	30
3.3.2	Propriétés - Identités de Ricci	31
3.3.3	Calcul effectif en coordonnées polaires et en coordonnées sphériques	32
3.4	Le tenseur dérivée covariante d'un champ de tenseurs	34
3.4.1	Le tenseur dérivée covariante d'un champ de vecteurs	34
3.4.2	Le tenseur dérivée covariante d'un champ de tenseurs d'ordre deux mixte	35
3.5	Equations des droites en coordonnées curvilignes	36
3.5.1	Equations dans un système quelconque de coordonnées curvilignes	36
3.5.2	Calcul effectif en coordonnées polaires	36
 II Etude de la géométrie pseudo-riemannienne		37
 4 Variétés différentielles		39
4.1	Première approche : l'exemple de la sphère	39
4.2	Notion de variété différentielle	42
4.2.1	Carte, coordonnées locales et atlas	42
4.2.2	Variété différentielle	44
4.2.3	Variété produit	45
4.3	Applications différentiables de variétés	46
4.4	Notion de sous-variété	47
4.4.1	Sous-variétés de \mathbb{R}^n	47
4.4.2	Sous-variétés de variétés	49
 5 Espace vectoriel tangent		51
5.1	Vecteur tangent	51
5.1.1	Arcs de courbes tangents - Première définition des vecteurs tangents	51
5.1.2	Fonction le long d'une courbe et tangence	54
5.1.3	Dérivation au sens de Leibniz - Deuxième définition des vecteurs tangents	56
5.2	Espace vectoriel tangent	57
5.2.1	Définition d'un espace vectoriel tangent	57
5.2.2	Base et dimension d'un espace vectoriel tangent	58
5.2.3	Changement de base naturelle d'un espace vectoriel tangent	59
 6 Calcul tensoriel dans une variété différentielle		61
6.1	Quelques compléments sur les variétés	61
6.1.1	Fibré tangent et champs de vecteurs	61
6.1.2	Transformation locale de V_n	64
6.1.3	Espace vectoriel cotangent	65
6.2	Tenseur en un point - Champ de tenseurs	66
6.2.1	Tenseur en un point	66
6.2.2	Champ de tenseurs	70
6.3	Dérivée de Lie	71
6.3.1	Dérivée de Lie d'une fonction scalaire	71
6.3.2	Dérivée de Lie d'un champ de tenseurs	71

7	Variétés pseudo-riemanniennes	75
7.1	Notion de variété pseudo-riemannienne	75
7.1.1	Tenseur métrique et variété pseudo-riemannienne	75
7.1.2	Pseudo produit scalaire	77
7.1.3	Isomorphisme canonique et tenseur conjugué	78
7.2	Connexion linéaire et dérivée covariante d'un champ de vecteurs	79
7.2.1	Définitions	79
7.2.2	Interprétation géométrique de la dérivée covariante	81
7.2.3	Connexion de Levi-Civita	82
7.2.4	Géodésiques et équations d'Euler	84
7.3	Les tenseurs de la relativité générale	85
7.3.1	Tenseur de Riemann-Christoffel	85
7.3.2	Tenseur de Ricci et scalaire de courbure	87
7.3.3	Identités de Bianchi et tenseur d'Einstein	90
 III La théorie de la relativité générale		93
8	Géométrie de la relativité générale	95
8.1	Principes et géométrie de la physique classique	96
8.2	Principes et géométrie de la relativité restreinte	97
8.3	Principes et géométrie de la relativité générale	98
8.3.1	Principe de relativité généralisé	98
8.3.2	Principe d'équivalence	98
9	Les équations d'Einstein du champ gravitationnel	101
9.1	A la recherche d'équations	101
9.1.1	La Matière-Energie déforme l'espace-temps	101
9.1.2	Le tenseur Energie-Impulsion $Q_{\alpha\beta}$	103
9.1.3	Le tenseur d'Einstein $S_{\alpha\beta}$	104
9.2	Les équations d'Einstein du champ gravitationnel	104
9.2.1	Expression générale des équations	104
9.2.2	Limite newtonienne	105
 Conclusion et discussion		109
 Bibliographie		111

Introduction

Cet exposé a été réalisé dans le cadre du Projet d'Initiation à la Recherche de deuxième année. L'objet de celui-ci est l'étude de la géométrie de la relativité générale, qui fait intervenir notamment les concepts de variété différentielle, d'espace vectoriel tangent, de métrique pseudo-riemannienne et de courbure. Le fait que la théorie de la relativité générale soit souvent présentée comme une théorie purement mathématique nous interpelait et c'est pour cela que nous nous sommes intéressés tout particulièrement à la géométrie utilisée dans celle-ci.

Plus précisément, nous essayons d'expliquer pourquoi cette géométrie, bien plus générale que la géométrie euclidienne et en outre totalement différente, est la bonne géométrie pour représenter l'espace-temps de la relativité générale, et pourquoi elle a une place si importante au sein de la théorie. La géométrie est en effet souvent moins l'élément clé que le support pour développer une théorie physique.

Le sujet de notre exposé est de répondre à la première interrogation. La seconde interrogation a une portée philosophique très forte, et pourrait en elle-même constituer un exposé.

Il nous semblait tout de même important d'en dire quelques mots dans l'introduction, puisque c'est par elle que nous sommes arrivés à notre sujet actuel. Donnons donc quelques éléments de réponse à cette seconde interrogation, en essayant de montrer les liens très étroits qui existent depuis toujours entre la géométrie et la physique qui, en un sens, font partie d'une seule et même entité.

La physique a vu le jour dans l'Antiquité grecque, entre le VII^e siècle et le V^e siècle avant J.-C., avec l'émergence des penseurs présocratiques tels que Thalès, Pythagore ou Empédocle. Ils avaient le désir de rompre avec les récits mythologiques de la culture commune grecque, en proposant des démarches relevant moins du récit que de l'explication : leurs réflexions reposaient sur une exigence de rationalité. Si nous convenons que la physique est l'étude des lois de la nature, c'est à dire la modélisation de phénomènes par des lois mathématiques dans le but de comprendre quelles causes sont responsables de quels effets, alors leurs démarches relevait bien de celle-ci. Empédocle, par exemple, exhiba un certain nombre de causes (l'eau, l'air et le feu) qu'il jugeait responsable de phénomènes qu'il observait : le vent met en mouvement les feuilles des arbres, le feu détruit les branchages, etc...

Dans le même temps, Thalès et Pythagore tentèrent de montrer un certain nombre de propriétés des figures du plan par un raisonnement hypothético-déductif. Leur démarche était donc similaire à celle d'Empédocle puisqu'elle consistait à expliquer certains phénomènes visibles (qu'il s'agisse respectivement du mouvement des feuilles ou de l'orthogonalité de deux droites) en les reliant à des causes.

Ces deux sciences ont donc vu le jour à la même période et répondaient à la même exigence de rationalité : pourquoi donc les différencier, a priori ? Il n'y a en effet aucun doute que, dans l'Antiquité grecque, la géométrie était une science semi-empirique, une espèce de physique primitive : un point était un corps dont on faisait abstraction de l'extension et une droite était définie comme l'image d'un fil tendu. Il s'agissait donc de concepts qui s'établissaient en relation

directe avec les faits réels. Les propriétés des points et des droites étaient autant des propriétés géométriques abstraites que des propriétés de certains phénomènes observés dans la nature. La géométrie et la physique ont donc clairement la même origine, mais leur histoire commune ne s'arrête pas là.

La géométrie s'est ensuite transformée au cours du III^e siècle avant J.-C. avec les travaux d'Euclide, qui s'est aperçu que la majeure partie de ses propriétés pouvaient se déduire de manière purement logique d'un petit nombre d'entre elles, appelées axiomes. La géométrie devint une science dite mathématique, dans le sens où elle s'occupa alors exclusivement de relations logiques entre des objets préalablement donnés, relations appartenant à un système de logique indépendant de l'expérience. Il ne restait ainsi dans le système de la géométrie que les concepts fondamentaux de points et de droites et lesdits axiomes, non logiquement réductibles aux autres, et témoins de son origine empirique. Ceux-ci furent peu à peu considérés comme évidents de sorte que la négation d'un axiome ne puisse qu'être contraire au bon sens. Cette géométrie, dite euclidienne, fut ainsi considérée, jusqu'au XIX^e siècle, comme absolument inébranlable. Parallèlement, la physique se développa, et connut un essor tout particulier à partir du XVII^e siècle avec les travaux de Galilée puis au XVIII^e siècle avec ceux de Newton et de Descartes. Leurs théories permettaient d'expliquer certains phénomènes élémentaires de la mécanique et de l'optique par des lois mathématiques simples. Le lien entre la physique et la géométrie était toujours aussi important, puisque les lois mathématiques ne pouvaient être écrites que par le moyen de la géométrie qui avait pour rôle de décrire l'espace dans lequel précisément elles étaient écrites. La géométrie précédait donc à chaque fois les théories physiques, en jouant uniquement un rôle de support, et dans l'inconscient du physicien, ses concepts étaient évidents.

Dépasser cette situation fut un travail long et difficile qui prit plus d'un siècle. Lobatchevski remit en cause, dans les années 1830, le cinquième postulat d'Euclide sur les parallèles, et en proposa un autre. Cela l'amena à une autre géométrie plane (dite hyperbolique), non euclidienne, où par un point donné passe une infinité de droites parallèle à une autre, et où la somme des angles d'un triangle est inférieur à 180 degrés. La conviction s'affirma alors chez les mathématiciens qu'il existait d'autres géométries, à côté de la géométrie euclidienne. Les physiciens se demandèrent naturellement quelle est la géométrie valide dans le monde de la physique : c'était déjà un premier pas vers la relativité générale. Le deuxième pas important fut fait par Riemann dans les années 1850. Il créa, dans un premier temps, une nouvelle géométrie plane (dite sphérique), différente de celle de Lobatchevski. Et, dans un second temps, il créa une géométrie incomparablement plus générale que celle d'Euclide et que les deux citées auparavant. Cette géométrie, dite riemannienne, n'est euclidienne que pour les éléments infiniment petits. Dans cette géométrie, les propriétés métriques de l'espace et, par voie de conséquence, la possibilité de positionnement d'un nombre infini de solides infiniment petits dans un domaine fini, ne sont pas déterminées exclusivement par les axiomes de la géométrie. Il comprit donc que les propriétés métriques de l'espace pouvait être conditionnées par la présence de corps physiques. Il conclut à l'indissociabilité de la géométrie et de la physique. C'est cette idée qui devint réalité avec la théorie de la relativité générale d'Einstein.

Maintenant justifiée brièvement l'éminente importance de la géométrie dans toute théorie physique, et en particulier dans la théorie de la relativité générale, revenons à notre première interrogation : pourquoi la géométrie pseudo-riemannienne est la bonne géométrie pour représenter l'espace-temps de la relativité générale ?

Pour répondre à cette question, nous avons adopté la démarche suivante.

Dans la première partie, composée de trois chapitres, nous nous approprions les techniques

essentiels de calcul tensoriel dans un cadre mathématique simple, celui des espaces ponctuels euclidiens. Ces trois chapitres permettent de nous familiariser avec certains outils de calcul tensoriel importants : la dérivée covariante et les symboles de Christoffel par exemple.

Dans la seconde partie, nous introduisons les notions fondamentales de variété différentielle, d'espace vectoriel tangent et de métrique pseudo-riemannienne. Composée de quatre chapitres, cette partie permet de nous familiariser avec des structures mathématiques nouvelles dans lesquelles il est alors possible de réintroduire les techniques de calcul tensoriel utilisées dans la première partie.

Dans la troisième et dernière partie, nous nous attaquons au coeur du sujet. Nous justifions l'utilisation de la géométrie pseudo-riemannienne, étudiée dans la deuxième partie, en reliant les principes de la relativité générale aux hypothèses constitutives de cette géométrie. Nous consacrons enfin un dernier chapitre aux équations d'Einstein.

Nous souhaitons remercier chaleureusement nos deux encadrants de PIR, M. Teichtel et M. Claeys, pour leurs conseils avisés et leur disponibilité. Enfin, nous remercions le service de reprographie de Supaéro pour l'impression de nombreux documents et de cet exposé.

Première partie

Eléments de calcul tensoriel dans les
espaces ponctuels euclidiens

Chapitre 1

Contravariance et covariance : dualité dans un espace vectoriel

Nous allons dans ce premier chapitre introduire les notions élémentaires de contravariance et de covariance dans un espace vectoriel de dimension finie n , puis dans un espace vectoriel euclidien de dimension finie n . Ce chapitre d'introduction est relativement court et facile mais il n'en est pas moins important et utile pour la suite. Le lecteur doit, à la fin du chapitre, maîtriser parfaitement les différentes conventions et manipulations de composantes que l'on va présenter.

1.1 Conventions

Nous utiliserons deux conventions particulièrement pratiques dans notre exposé.

1.1.1 Notation d'Einstein

Soit E_n un espace vectoriel de dimension finie n et de base (e_1, \dots, e_n) . Tout vecteur x de E_n s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i \quad (1.1)$$

La convention d'Einstein consiste à ne pas écrire le symbole \sum quand il y a répétition du même indice i dans un même monôme. La variation de l'indice i se fera, si rien n'est précisé, de 1 à n . Par exemple, on écrira :

$$x = x^i e_i \quad (1.2)$$

au lieu de (1.1).

De la même manière, l'expression :

$$a_m^k b^m \quad (1.3)$$

signifie une sommation uniquement sur l'indice m (de 1 à n), pour un certain k .

Enfin, l'équation :

$$a_m^k b^m = c_k \quad (1.4)$$

pour $n=3$ représente donc le système d'équations :

$$\begin{cases} a_1^1 b^1 + a_2^1 b^2 + a_3^1 b^3 = c_1 \\ a_1^2 b^1 + a_2^2 b^2 + a_3^2 b^3 = c_2 \\ a_1^3 b^1 + a_2^3 b^2 + a_3^3 b^3 = c_3 \end{cases} \quad (1.5)$$

Remarque : Nous désignerons la base $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'un espace vectoriel par (e_k) , et les composantes $(x^k)_{1 \leq k \leq n}$ par (x^k) .

1.1.2 Notation d'indice primé

Supposons maintenant que nous disposons de deux bases (e_k) et (e'_k) . Au lieu de faire porter l'indication primée sur le vecteur lui-même, nous la placerons sur l'indice et écrirons donc $(e_{k'})$ plutôt que (e'_k) .

Un vecteur x de E_n s'écrira donc :

$$x = x^k e_k \quad x = x^{k'} e_{k'} \quad (1.6)$$

1.2 Vecteurs contravariants et covariants d'un espace vectoriel

Définissons les notions duales de contravariance et de covariance dans un espace vectoriel E_n de dimension finie n .

1.2.1 Vecteurs contravariants : les vecteurs de E_n

Soit E_n un espace vectoriel de dimension finie n , et x un vecteur de E_n . Soit $(e_i), (e_{j'})$ deux bases de E_n . Chaque vecteur d'une base peut se décomposer sur l'autre base selon :

$$e_{j'} = A_{j'}^i e_i \quad e_i = A_i^{j'} e_{j'} \quad (1.7)$$

On décompose alors x sur les deux bases :

$$x = x^i e_i \quad x = x^{j'} e_{j'} \quad (1.8)$$

En injectant (1.7) dans (1.8) :

$$x = (A_{j'}^i x^{j'}) e_i \quad x = (A_i^{j'} x^i) e_{j'} \quad (1.9)$$

On obtient donc les formules de transformation des composantes :

$$x^i = A_{j'}^i x^{j'} \quad x^{j'} = A_i^{j'} x^i \quad (1.10)$$

Définition 1.1 : Vecteurs contravariants

Les vecteurs d'un espace vectoriel E_n de dimension finie n sont appelés vecteurs contravariants. Ils sont caractérisés par les formules de transformation de leurs composantes lors d'un changement de base (e_i) en $(e_{j'})$:

$$x^i = A_{j'}^i x^{j'} \quad x^{j'} = A_i^{j'} x^i$$

Les composantes (x^i) et $(x^{j'})$ sont appelées composantes contravariantes d'un vecteur contravariant.

1.2.2 Vecteurs covariants : les vecteurs de E_n^*

Notons E_n^* l'espace dual de E_n , espace vectoriel des formes linéaires sur E_n . Soit (e_i^*) et $(e_{j'}^*)$ les bases duales des bases (e_i) et $(e_{j'})$. Soit f un élément de E_n^* , f s'écrit :

$$f = f_i e_i^* \quad f = f_{j'} e_{j'}^* \quad (1.11)$$

Soit alors x dans E_n :

$$x = x^i e_i \quad x = x^{j'} e_{j'} \quad (1.12)$$

(1.12) dans (1.11) donne par linéarité :

$$f(x) = f_i x^k \underbrace{e_i^*(e_k)}_{\delta_{ik}} \quad f(x) = f_{j'} x^{k'} \underbrace{e_{j'}^*(e_{k'})}_{\delta_{j'k'}} \quad (1.13)$$

Soit :

$$f(x) = f_i x^i \quad f(x) = f_{j'} x^{j'} \quad (1.14)$$

En utilisant les formules (1.10) :

$$f(x) = A_{j'}^i f_i x^{j'} \quad f(x) = A_i^{j'} f_{j'} x^i \quad (1.15)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$f = (A_{j'}^i f_i) e_{j'}^* \quad f = (A_i^{j'} f_{j'}) e_i^* \quad (1.16)$$

D'où les formules de transformation des composantes des formes linéaires :

$$f_{j'} = A_{j'}^i f_i \quad f_i = A_i^{j'} f_{j'} \quad (1.17)$$

Définition 1.2 : Vecteurs covariants

Les vecteurs de l'espace dual E_n^* d'un espace vectoriel E_n de dimension finie n sont appelés vecteurs covariants. Ils sont caractérisés par les formules de transformation de leurs composantes lors d'un changement de base (e_i^*) en $(e_{j'}^*)$:

$$f_{j'} = A_{j'}^i f_i \quad f_i = A_i^{j'} f_{j'}$$

Les composantes (f_i) et $(f_{j'})$ sont appelées composantes covariantes d'un vecteur covariant.

1.3 Passage aux espaces vectoriels euclidiens

Nous nous plaçons maintenant dans un espace vectoriel euclidien E_n de dimension finie n , c'est à dire dans un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive.

1.3.1 Réécriture du produit scalaire

Notons $x \cdot y$ le produit scalaire sur E_n . Ecrivons :

$$g_{ij} := e_i \cdot e_j \quad (1.18)$$

Les n^2 quantités g_{ij} symétriques sont des données fondamentales d'une espace vectoriel euclidien. La matrice $G = (g_{ij})$ est appelée tenseur métrique. On peut alors écrire pour tout vecteur x et y de E_n :

$$x \cdot y = (x^i e_i) \cdot (y^j e_j) = x^i y^j g_{ij} \quad (1.19)$$

1.3.2 Composantes covariantes d'un vecteur contravariant

Soit x dans E_n . Le produit scalaire permet de lui associer canoniquement une forme linéaire f_x définie par :

$$\forall y \in E_n, f_x(y) = x \cdot y \quad (1.20)$$

Evaluons f_x sur les vecteurs de base (e_i) :

$$f_x(e_i) = x \cdot e_i = x^j g_{ij} \quad (1.21)$$

Définition 1.3 : Composantes covariantes d'un vecteur contravariant

Soit x dans E_n , et f_x la forme linéaire associée.

Les réels $f_x(e_i)$ sont appelées composantes covariantes de x et on les note x_i .

On a d'après (1.21) :

$$x_i = x^j g_{ij}$$

1.3.3 Expressions du produit scalaire en fonction des composantes contravariantes et covariantes

Supposons que G est inversible (cela sera justifiée plus tard) et notons (g^{ij}) les coefficients de la matrice inverse.

On a alors successivement :

Proposition 1.4 : Expressions du produit scalaire

$$x \cdot y = x^i y^j g_{ij} = x_j y^j = x^j y_j = x_i y_j g^{ij}$$

1.3.4 Relations entre composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur contravariant

On a immédiatement d'après la définition (1.3) et la proposition (1.4) :

Proposition 1.5 : Relations entre composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur contravariant

$$\begin{aligned}x^i &= x_j g^{ij} \\x_j &= x^i g_{ij}\end{aligned}$$

Ce chapitre nous a permis d'introduire les notions clés de contravariance et de covariance dans un cadre bien connu, celui des espaces vectoriels euclidiens. Nous avons constaté que ces notions étaient duales et qu'elles se caractérisaient en pratique par des formules de changement de composantes "duales". Ces notions essentielles seront abordées dans un cadre général dans le chapitre 6.

Chapitre 2

Les espaces ponctuels euclidiens

L'étude des phénomènes physiques recourt à leur représentation dans des espaces formés de points. Ainsi, l'espace-temps de Minkowski de la relativité restreinte est un ensemble dont les points représentent les événements. Les grandeurs physiques sont attachées à chacun des points de l'espace-temps et forment des champs scalaires ou vectoriels. Il faut donc se donner une définition mathématique des espaces formés de points appelés espaces ponctuels.

Cette définition va être faite à partir de la notion d'espace vectoriel. De façon rigoureuse, les espaces formés de points sont, en mathématiques, les espaces affines. Mais le cadre développé ici, moins rigoureux, est suffisant pour arriver à quelques résultats essentiels.

Les espaces ponctuels forment donc un cadre formel dans lequel il est possible de faire du calcul tensoriel. C'est ce cadre simple que nous utiliserons dans ce chapitre et dans le chapitre 3.

Ce n'est qu'au chapitre 6 que nous introduirons les tenseurs (et le calcul tensoriel) de manière rigoureuse dans un cadre général.

2.1 Définitions

2.1.1 Espace ponctuel euclidien

Soit P_n un ensemble d'éléments notés A, B , etc. Par exemple, un ensemble P_4 dont les éléments sont des quadruplets de nombre réels tels que $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$.

Supposons qu'à tout couple (A, B) d'éléments de P_n , pris dans cet ordre, on puisse faire correspondre un vecteur, noté AB , d'un espace vectoriel E_n à n dimensions.

Cela revient à se donner l'application Ψ suivante :

$$\Psi : P_n \times P_n \rightarrow E_n : (A, B) \mapsto \Psi(A, B) \underbrace{=}_{\text{notation}} AB$$

Imposons à Ψ qu'elle vérifie les trois axiomes suivants :

- (i) $\forall A, B \in P_n, \Psi(A, B) = -\Psi(B, A)$
- (ii) $\forall A, B, C \in P_n, \Psi(A, C) = \Psi(A, B) + \Psi(B, C)$
- (iii) $\forall O \in P_n, \forall x \in E_n, \exists! M \in P_n, \Psi(O, M) = x$

Définition 2.1 : Espace ponctuel euclidien

Soit P_n un ensemble d'éléments appelés points.

L'espace P_n muni d'une telle application Ψ constitue un espace ponctuel à n dimensions, que l'on note \mathcal{E}_n .

Lorsque E_n est un espace vectoriel euclidien, on dit que \mathcal{E}_n est un espace ponctuel euclidien.

2.1.2 Repères d'un espace ponctuel

Soit \mathcal{E}_n un espace ponctuel euclidien et (e_k) une base de l'espace vectoriel euclidien E_n associé. Soit O un point quelconque de \mathcal{E}_n .

Le tableau suivant résume les notions de repères dans un espace ponctuel euclidien \mathcal{E}_n , définies à partir des notions de base dans un espace vectoriel euclidien.

E_n	\mathcal{E}_n
(e_k) base de l'espace vectoriel	(O, e_k) repère de l'espace ponctuel O origine du repère
(e_k°) BON de l'espace vectoriel	(O, e_k°) repère cartésien de l'espace ponctuel O origine du repère cartésien
$x = x^k e_k^\circ$	$OM := x = x^k e_k^\circ$
x^k composantes contravariantes du vecteur x	x^k coordonnées du point M

2.2 Calcul différentiel dans un espace ponctuel euclidien

Introduisons un certain nombre de notions nécessaires pour faire du calcul différentiel dans un espace ponctuel.

2.2.1 Notation indicielle des dérivées partielles

Afin d'alléger les expressions des dérivées des fonctions de plusieurs variables, nous allons utiliser des notations condensées.

Soit f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} :

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto f(x^1, \dots, x^n)$$

On notera de la manière suivante la dérivée partielle par rapport à la variable x^k :

$$\partial_k f := \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

Les dérivées secondes par rapport aux variables x^i et x^j s'écriront :

$$\partial_{ij} f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$$

Lorsque x est un vecteur d'un espace vectoriel E_n ($x = x^i e_i$), dont les composantes x^i sont fonctions de n variables u^k ($x^i = x^i(u^1, \dots, u^n)$), les dérivées partielles du vecteur seront notées :

$$\partial_k x := \frac{\partial x}{\partial u^k} = \frac{\partial x^i e_i}{\partial u^k} = \frac{\partial x^i}{\partial u^k} e_i$$

c'est à dire :

$$\partial_k x := (\partial_k x^i) e_i$$

2.2.2 Coordonnées curvilignes

Soit \mathcal{E}_n un espace ponctuel euclidien, et (O, e_k°) un repère cartésien de \mathcal{E}_n . Soit x^k les coordonnées d'un point M de \mathcal{E}_n par rapport à ce repère.

Définition 2.2 : Coordonnées curvilignes

Un système de coordonnées curvilignes u^k , $1 \leq k \leq n$, est obtenu en se donnant n fonctions h^i :

$$x^i = h^i(u^1, \dots, u^n), 1 \leq i \leq n$$

continûment dérivables par rapport à chaque variable u^k . On suppose de plus que le jacobien des x^i et des u^k est non nul.

2.2.3 Repère naturel

Le but de nos espaces ponctuels est de "simuler" le comportement des variétés différentielles (cadre adéquat de la relativité générale), qui sont caractérisées, et nous le verrons plus tard, par l'absence de coordonnées globales. En pratique, on a donc accès, sur les variétés, uniquement à des coordonnées locales : la base de l'espace n'est pas la même en tout point. On va donc introduire, sur les espaces ponctuels, des bases dépendant du point de l'espace.

Soient (O, e_i) et (O', e_i) deux repères d'une espace ponctuel euclidien \mathcal{E}_n . Au point M de cet espace est associé un vecteur $OM = OO' + O'M$. Si le vecteur OM dépend d'un certain nombre de paramètres u^k , les dérivées partielles de OM par rapport à u^k sont indépendantes du point origine choisi puisque OO' est un vecteur fixe. On peut donc écrire les dérivées partielles de OM sous la forme suivante :

$$\partial_k OM = \partial_k(OO' + O'M) = \partial_k M$$

Définition 2.3 : Repère naturel

Soit u^k les coordonnées curvilignes d'un point M par rapport au repère cartésien (O, e_i°) . Dans ce repère, on a $OM = x^i e_i^\circ$, où les coordonnées x^i sont des fonctions $x^i = x^i(u^1, \dots, u^n)$. Les n vecteurs (e_k) :

$$e_k := \partial_k M = (\partial_k x^i) e_i^\circ$$

forment la base dite naturelle au point M de l'espace vectoriel associé E_n . (M, e_k) est appelé repère naturel en M du système de coordonnées u^k .

Remarque : On vérifie aisément que les vecteurs (e_k) forment bien une base (non orthogonale) de l'espace vectoriel euclidien E_n .

Définition 2.4 : Différentielle d'un vecteur

La différentielle d'un vecteur OM s'écrit sous la forme :

$$dM := \partial_k M du^k = du^k e_k$$

Les quantités du^k sont les composantes contravariantes du vecteur dM dans le repère naturel (M, e_k) du système de coordonnées u^k .

2.2.4 Élément linéaire et distance**Définition 2.5 : Distance**

Soit un vecteur $dM = MM'$ joignant deux points infiniment proches M et M' . Par définition, la norme du vecteur dM s'appelle la distance entre ces deux points.

Définition 2.6 : Élément linéaire

On définit l'élément linéaire ds de l'espace ponctuel euclidien \mathcal{E}_n par son carré :

$$ds^2 := dM \cdot dM = (du^k e_k) \cdot (du^i e_i) = g_{ki} du^k du^i$$

Les n^2 quantités g_{ki} sont appelées composantes du tenseur métrique définies à l'aide d'une base naturelle. Ces quantités sont définies en chaque point de l'espace ponctuel.

2.2.5 Calcul effectif en coordonnées polaires et en coordonnées sphériques

Coordonnées polaires On se place en dimension $n = 2$. Soit (e_1°, e_2°) la base orthonormée canonique de \mathbb{R}^2 . Tout vecteur x de \mathbb{R}^2 s'écrit :

$$x = x^1 e_1^\circ + x^2 e_2^\circ$$

Cette base induit donc un système de coordonnées canoniques (x^1, x^2) . On définit un système de coordonnées curvilignes (les coordonnées polaires) en posant :

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \cos u^2 \in \mathbb{R} \\ x^2 = u^1 \sin u^2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} u^1 \in \mathbb{R}_+ \\ u^2 \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

On écrit par la suite $r := u^1$ et $\theta := u^2$, c'est à dire :

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \theta \\ x^2 = r \sin \theta \end{cases}$$

Les vecteurs de la base naturelle s'écrivent alors :

$$\begin{cases} e_1 = \cos \theta e_1^\circ + \sin \theta e_2^\circ \\ e_2 = -r \sin \theta e_1^\circ + r \cos \theta e_2^\circ \end{cases}$$

Le tenseur métrique G s'écrit donc :

$$G = (g_{ij}) = (e_i \cdot e_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'exprimer l'élément linéaire ds :

$$ds = \sqrt{g_{ij} du^i du^j} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

Coordonnées sphériques On se place en dimension $n = 3$. Soit $(e_1^\circ, e_2^\circ, e_3^\circ)$ la base orthonormée canonique de \mathbb{R}^3 . Tout vecteur x de \mathbb{R}^3 s'écrit :

$$x = x^1 e_1^\circ + x^2 e_2^\circ + x^3 e_3^\circ$$

Cette base induit donc un système de coordonnées canoniques (x^1, x^2, x^3) . On définit un système de coordonnées curvilignes (les coordonnées sphériques) en posant :

$$\begin{cases} x^1 = r \sin \theta \cos \phi \in \mathbb{R} \\ x^2 = r \sin \theta \sin \phi \in \mathbb{R} \\ x^3 = r \cos \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} r \in \mathbb{R}_+ \\ \theta \in [0, \pi] \\ \phi \in [0, 2\pi[\end{cases}$$

Les vecteurs de la base naturelle s'écrivent alors :

$$\begin{cases} e_1 = \sin \theta \cos \phi e_1^\circ + \sin \theta \sin \phi e_2^\circ + \cos \theta e_3^\circ \\ e_2 = r \cos \theta \cos \phi e_1^\circ + r \cos \theta \sin \phi e_2^\circ - r \sin \theta e_3^\circ \\ e_3 = -r \sin \theta \sin \phi e_1^\circ + r \sin \theta \cos \phi e_2^\circ \end{cases}$$

Le tenseur métrique G s'écrit donc :

$$G = (g_{ij}) = (e_i \cdot e_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'exprimer l'élément linéaire ds :

$$ds = \sqrt{g_{ij} du^i du^j} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}$$

Chapitre 3

Analyse tensorielle

Dans ce chapitre, nous allons définir les tenseurs de manière analytique dans le cadre des espaces ponctuels euclidiens, en regardant la transformation de leurs composantes lors d'un changement de coordonnées curvilignes. Nous pourrons alors introduire les outils essentiels de calcul tensoriel : les symboles de Christoffel et le tenseur dérivée covariante.

3.1 Définition analytique des tenseurs

Nous allons définir les tenseurs analytiquement, à travers des formules de transformation de leurs composantes lors d'un changement de coordonnées curvilignes.

3.1.1 Changement de base d'un repère naturel

Examinons comment se transforment les vecteurs de base d'un repère naturel.

Proposition 3.1 : Transformation des vecteurs de base du repère naturel

Soit \mathcal{E}_n un espace ponctuel euclidien, et M un élément de \mathcal{E}_n . Soit alors deux repères naturels (M, e_i) et $(M, e_{k'})$ associés à deux systèmes de coordonnées curvilignes u^i et $u^{k'}$. Supposons qu'ils soient liés par les relations :

$$u^i = u^i(u^{i'}, \dots, u^{n'})$$

$$u^{k'} = u^{k'}(u^i, \dots, u^n)$$

où l'on suppose les fonctions u^i et $u^{k'}$ suffisamment régulières.

On a alors les relations de transformation :

$$e_{k'} = A_{k'}^i e_i$$

$$e_i = A_i^{k'} e_{k'}$$

avec :

$$A_{k'}^i = \partial_{k'} u^i$$

$$A_i^{k'} = \partial_i u^{k'}$$

Preuve : Par définition de la base naturelle on a les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} e_i &:= \partial_i M = \frac{\partial M}{\partial u^i} \\ e_{k'} &:= \partial_{k'} M = \frac{\partial M}{\partial u^{k'}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Donc (avec la convention d'Einstein) :

$$e_{k'} = \frac{\partial M}{\partial u^{k'}} = \frac{\partial M}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u^{k'}} = \left(\frac{\partial u^i}{\partial u^{k'}} \right) e_i \tag{3.2}$$

De même on trouve :

$$e_i = \frac{\partial M}{\partial u^i} = \frac{\partial M}{\partial u^{k'}} \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^i} = \left(\frac{\partial u^{k'}}{\partial u^i} \right) e_{k'} \tag{3.3}$$

Or, au chapitre 1, on avait vu que les vecteurs de base se transformaient selon :

$$\begin{aligned} e_{k'} &= A_{k'}^i e_i \\ e_i &= A_i^{k'} e_{k'} \end{aligned} \tag{3.4}$$

En identifiant (3.4) avec (3.3) et (3.2), on obtient :

$$\begin{aligned} A_{k'}^i &= \partial_{k'} u^i \\ A_i^{k'} &= \partial_i u^{k'} \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement les formules de transformation des composantes contravariantes des vecteurs contravariants, conformément à la définition (1.1) du chapitre 1.

Proposition 3.2 : Transformation des vecteurs contravariants

Soit \mathcal{E}_n un espace ponctuel euclidien, et M un élément de \mathcal{E}_n . Soit alors deux repères naturels (M, e_i) et $(M, e_{k'})$ associés à deux systèmes de coordonnées curvilignes u^i et $u^{k'}$, avec les mêmes hypothèses que précédemment.

Soit $x = x^i e_i = x^{k'} e_{k'}$. On a alors les relations de transformation pour ses composantes :

$$\begin{aligned} x^{k'} &= A_i^{k'} x^i \\ x^i &= A_{k'}^i x^{k'} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} A_i^{k'} &= \partial_i u^{k'} \\ A_{k'}^i &= \partial_{k'} u^i \end{aligned}$$

3.1.2 Définition des tenseurs d'ordre 2

La définition des tenseurs d'ordre deux se base sur les observations faites, dans la partie précédente, sur la manière dont se transforment les vecteurs de base et les composantes contravariantes des vecteurs contravariants, lors d'un changement de coordonnées curvilignes.

Définition 3.3 : Tenseur contravariant d'ordre deux

Soit A un ensemble de n^2 composantes attaché à un point M de \mathcal{E}_n .

Notons A^{ik} les composantes de A associées à un système de coordonnées curvilignes u^i .

A est un tenseur contravariant d'ordre deux si les composantes de A se transforment, lors d'un changement de coordonnées curvilignes u^i en $u^{k'}$, selon :

$$A^{ik} = (\partial_{l'} u^i)(\partial_{m'} u^k) A^{l'm'}$$

Remarque : Les composantes de A se transforment comme se transformerait le produit des composantes contravariantes de deux vecteurs B, C de composantes respectives B^i, C^k :

$$\begin{aligned} B^i C^k &= \partial_{l'} u^i B^{l'} \partial_{m'} u^k C^{m'} \\ \Rightarrow B^i C^k &= \partial_{l'} u^i \partial_{m'} u^k B^{l'} C^{m'} \end{aligned}$$

Par analogie on définit les tenseurs d'ordre deux mixtes et covariants.

Définition 3.4 : Tenseur covariant d'ordre deux

A est un tenseur covariant d'ordre deux si les composantes de A se transforment, lors d'un changement de coordonnées curvilignes u^i en $u^{k'}$, selon :

$$A_{ik} = (\partial_i u^{l'}) (\partial_k u^{m'}) A_{l'm'}$$

Exemple : Montrons que les n^2 quantités $e_i \cdot e_k = g_{ik}$ sont les composantes d'un tenseur covariant d'ordre deux.

Par un changement de coordonnées curvilignes, on a selon la proposition (3.1) :

$$g_{ik} = e_i \cdot e_k = (\partial_i u^{l'} e_{l'}) \cdot (\partial_k u^{m'} e_{m'}) = (\partial_i u^{l'} \partial_k u^{m'}) e_{l'} \cdot e_{m'} = (\partial_i u^{l'} \partial_k u^{m'}) g_{l'm'}$$

Les n^2 quantités g_{ik} définissent donc un tenseur G covariant d'ordre deux, appelé tenseur métrique. Il dépend du point M considéré (via la base locale), on a donc un tenseur métrique en chaque point de l'espace ponctuel : on dit que l'on a un champ de tenseurs métrique sur l'espace ponctuel.

Définition 3.5 : Tenseur mixte d'ordre deux

A est un tenseur mixte d'ordre deux si les composantes de A se transforment, lors d'un changement de coordonnées curvilignes u^i en $u^{k'}$, selon :

$$A_k^i = (\partial_{l'} u^i)(\partial_k u^{m'}) A_{m'}^{l'}$$

3.1.3 Définition des tenseurs d'ordre quelconque

On peut généraliser la notion de tenseur à un ordre quelconque, en considérant le même changement de coordonnées appliqué à ses composantes.

Définition 3.6 : Tenseur d'ordre quelconque

A est un tenseur d'ordre quelconque si ses composantes se transforment, lors d'un changement de coordonnées curvilignes u^i en $u^{k'}$, selon les formules décrites plus haut. Par exemple, les composantes d'un tenseur d'ordre cinq, deux fois contravariants et trois fois covariants, se transformeraient selon :

$$A_{ikl}^{mn} = (\partial_i u^{q'}) (\partial_k u^{s'}) (\partial_l u^{c'}) (\partial_{p'} u^m) (\partial_{v'} u^n) A_{q'c's'}^{p'v'}$$

Remarque : L'ordre d'un tenseur est donné par le nombre d'indices de ses composantes. Les scalaires sont les tenseurs d'ordre zéro et les vecteurs sont les tenseurs d'ordre un.

3.2 Opération sur les tenseurs

Maintenant les tenseurs définis, à travers leurs formules de changement de composantes, évoquons un certain nombre de techniques de calcul tensoriel utiles pour le physicien.

3.2.1 Passage des coordonnées contravariantes aux coordonnées covariantes

Les tenseurs peuvent être représentés par des composantes contravariantes, des composantes covariantes ou des composantes mixtes. Il paraît naturel alors de définir des relations de passages entre ces coordonnées. Ces relations de passage sont définies à partir du tenseur métrique qui, et nous le voyons encore un peu plus, joue un rôle fondamental.

Nous allons travailler avec un tenseur d'ordre deux, par souci de simplicité d'écriture, mais les résultats suivants sont vrais pour un tenseur d'ordre quelconque.

Soit donc \mathcal{E}_n un espace ponctuel. Soit G le tenseur métrique d'ordre deux associé à un point M de \mathcal{E}_n et A un tenseur quelconque d'ordre deux.

On note A^{ik} les composantes contravariantes de A , A_{ik} ses composantes covariantes et A^i_k et A_i^k ses composantes mixtes. De même, on note g_{ik} les composantes covariantes du tenseur G et g^{ik} ses composantes contravariantes.

Proposition 3.7 : Relation de passage

Les relations de passage entre coordonnées contravariantes, coordonnées covariantes et mixtes pour un tenseur d'ordre deux sont les relations suivantes :

$$\begin{cases} A^{ik} = g^{kl} A^i_l \\ A_{ik} = g_{kl} A^l_i \\ A^{ik} = g^{kl} g^{im} A_{ml} \end{cases}$$

Remarque : Ces trois relations peuvent être inversées, à condition que G soit inversible, ce qui est toujours le cas (nous le comprendrons plus tard). On a écrit ci-dessus toutes les relations nécessaires pour passer d'un jeu de composantes à l'autre, pour un tenseur d'ordre deux.

3.2.2 Contraction des indices et multiplication contractée

La contraction des indices est l'opération qui consiste, après avoir choisi deux indices, l'un covariant, l'autre contravariant, à les évaluer et à sommer par rapport à cet indice deux fois répété. L'ordre du tenseur est alors diminué de deux.

La multiplication contractée est l'opération qui consiste à multiplier les composantes de deux tenseurs d'ordre p et q pour obtenir un tenseur d'ordre $p + q$, puis de faire une contraction pour obtenir alors un tenseur d'ordre $p + q - 2$.

Exemple : Effectuons une multiplication contractée. Soient deux vecteurs x et y , de composantes respectives x^i et y_j , on peut créer un tenseur U , d'ordre deux, de composantes mixtes :

$$u^i_j = x^i y_j$$

Il reste maintenant à faire une contraction, pour obtenir un tenseur d'ordre zéro (un scalaire) :

$$u^i_i = x^i y_i = x \cdot y$$

qui n'est rien d'autre que le produit scalaire entre x et y .

3.2.3 Critère de tensorialité

On sait définir un tenseur, d'après la définition (3.6), par une relation de transformation de ses composantes lors d'un changement de coordonnées curvilignes. Ce critère est assez lourd à vérifier en pratique. Nous allons définir un critère de tensorialité, plus pratique, à l'aide de la multiplication contractée.

Proposition 3.8 : Critère de tensorialité

Si un produit contracté d'une quantité U avec un tenseur arbitraire est lui-même un tenseur alors U est aussi un tenseur.

Exemple : Vérifions que les quantités g_{ik} sont bien les composantes d'un tenseur. L'élément linéaire d'un espace ponctuel \mathcal{E}_n vérifie :

$$ds^2 = dM \cdot dM = (e_k du^k) \cdot (e_i du^i) = g_{ki} du^k du^i$$

Les quantités du^i sont les composantes d'un tenseur d'ordre un, les quantités $du^k du^i$ sont donc les composantes d'un tenseur d'ordre deux. Or, le produit contracté $g_{ki} du^k du^i$ est un scalaire, tenseur d'ordre zéro, donc les quantités g_{ik} définissent bien un tenseur d'ordre deux : le tenseur métrique.

3.3 Symboles de Christoffel

Considérons un espace ponctuel euclidien \mathcal{E}_n et attachons à chaque point M de cet espace un tenseur, défini par ses composantes relatives au repère naturel au point M d'un système de coordonnées curvilignes. On dit que l'on s'est donné un champ de tenseurs dans ce système de coordonnées curvilignes.

L'étude des champs de tenseurs constitue pour le physicien l'essentiel de l'analyse tensorielle. Le tenseur T d'un champ est une fonction du point M et on le note $T(M)$. Le but est alors de donner un sens à la "dérivée d'un tenseur par rapport aux coordonnées curvilignes".

Les composantes d'un tenseur sont en effet définies en chaque point M par rapport à un repère naturel qui varie d'un point à l'autre. Or, le calcul de la variation élémentaire des composantes d'un tenseur lorsqu'on passe d'un point M à un point infiniment voisin M' ne peut se faire que si l'on a recours à une même base. Le calcul des variations élémentaires de_i des vecteurs de bases d'un repère naturel (M, e_i) lorsque l'on passe de M à M' est donc le problème essentiel à résoudre : ce calcul fait intervenir des fonctions des coordonnées curvilignes appelées symboles de Christoffel.

3.3.1 Définitions

Soit \mathcal{E}_n un espace ponctuel euclidien de dimension n , associé à un espace vectoriel euclidien E_n de dimension n . Soit (e_k) la base naturelle associée au système de coordonnées curvilignes (u^k) .

Définition 3.9 : Symboles de Christoffel de deuxième espèce

Les variations élémentaires de_i des vecteurs de bases d'un repère naturel (M, e_i) peuvent être décomposées sur la base naturelle e_i :

$$de_i = w_i^j e_j$$

Les composantes w_i^j sont en général des combinaisons linéaires de différentielles. On a alors n^3 coefficients Γ_{ki}^j qui sont des fonctions des coordonnées curvilignes u^i , soit :

$$de_i = \Gamma_{ki}^j du^k e_j$$

Les Γ_{ki}^j sont appelés symboles de Christoffel de deuxième espèce.

Définition 3.10 : Symboles de Christoffel de première espèce

Les composantes covariantes w_{ji} des variations élémentaires de_i des vecteurs de bases d'un repère naturel (M, e_i) s'écrivent :

$$w_{ji} := de_i \cdot e_j = \Gamma_{kji} du^k$$

les composantes covariantes étant également des combinaisons linéaires des différentielles du^k ; les coefficients Γ_{kji} sont appelés symboles de Christoffel de première espèce.

3.3.2 Propriétés - Identités de Ricci

Proposition 3.11 :

Les symboles de Christoffel de première et de seconde espèce sont liés par les relations :

$$\begin{aligned}\Gamma_{kji} &= g_{jl}\Gamma_{ki}^l \\ \Gamma_{ki}^j &= g^{jl}\Gamma_{kli}\end{aligned}$$

Preuve : On a successivement :

$$w_{ji} = g_{jl}w_i^l = g_{jl}\Gamma_{ki}^l du^k = \Gamma_{kji} du^k$$

D'où :

$$g_{jl}\Gamma_{ki}^l = \Gamma_{kji}$$

Puis donc :

$$g^{jl}g_{jl}\Gamma_{ki}^l = \Gamma_{ki}^j = g^{jl}\Gamma_{kli}$$

Proposition 3.12 : Identités de Ricci

$$\partial_h g_{ij} = g_{ki}\Gamma_{hj}^k + g_{kj}\Gamma_{hi}^k$$

Preuve : On a successivement :

$$\begin{aligned}d(g_{ij}) &= de_i \cdot e_j + e_i \cdot de_j = (w_i^k e_k) \cdot e_j + e_i \cdot (w_j^k e_k) \\ \Rightarrow d(g_{ij}) &= w_i^k g_{kj} + w_j^k g_{ki} = (\Gamma_{hi}^k du^h)g_{kj} + (\Gamma_{hj}^k du^h)g_{ki}\end{aligned}$$

Or, par définition :

$$d(g_{ij}) = (\partial_h g_{ij}) du^h$$

D'où le résultat.

Supposons maintenant la symétrie $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ (qui implique la symétrie $\Gamma_{kij} = \Gamma_{jik}$). Cette symétrie est une hypothèse fondamentale des géométries que l'on étudiera dans le chapitre 7. On peut alors démontrer la proposition suivante.

Proposition 3.13 :

$$\begin{aligned}\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}g^{ih}(\partial_k g_{hj} + \partial_j g_{hk} - \partial_h g_{jk}) \\ \Gamma_{kji} &= \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki})\end{aligned}$$

Preuve : Ecrivons les identités de Ricci avec trois indices $k, h,$ et j :

- (1) $\partial_k g_{hj} = g_{hl}\Gamma_{jk}^l + g_{jl}\Gamma_{hk}^l$
- (2) $\partial_h g_{jk} = g_{jl}\Gamma_{kh}^l + g_{kl}\Gamma_{jh}^l$
- (3) $\partial_j g_{hk} = g_{hl}\Gamma_{kj}^l + g_{kl}\Gamma_{hj}^l$

En contractant (1), (2) et (3) avec g^{ih} sachant que $g^{ih}g_{hl} = \delta_l^i$:

$$\begin{aligned} (1) \quad & g^{ih}\partial_k g_{hj} = \Gamma_{jk}^i + g^{ih}g_{jl}\Gamma_{hk}^l \\ (2) \quad & g^{ih}\partial_h g_{jk} = g^{ih}g_{jl}\Gamma_{kh}^l + g^{ih}g_{kl}\Gamma_{jh}^l \\ (3) \quad & g^{ih}\partial_j g_{hk} = \Gamma_{kj}^i + g^{ih}g_{kl}\Gamma_{hj}^l \end{aligned}$$

On fait alors (1)+(3)-(2) et on utilise les symétries pour arriver à :

$$g^{ih}(\partial_k g_{hj} + \partial_j g_{hk} - \partial_h g_{jk}) = 2\Gamma_{jk}^i$$

D'où :

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{ih}(\partial_k g_{hj} + \partial_j g_{hk} - \partial_h g_{jk})$$

Puis :

$$\Gamma_{kji} = g_{jl}\Gamma_{ki}^l = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki})$$

3.3.3 Calcul effectif en coordonnées polaires et en coordonnées sphériques

Coordonnées polaires On rappelle qu'en coordonnées polaires on a établi que :

$$\begin{cases} e_1 = \cos \theta e_1^\circ + \sin \theta e_2^\circ \\ e_2 = -r \sin \theta e_1^\circ + r \cos \theta e_2^\circ \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} de_1 = -\sin \theta d\theta e_1^\circ + \cos \theta d\theta e_2^\circ \\ de_2 = -(\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)e_1^\circ + (\cos \theta dr - r d\theta \sin \theta)e_2^\circ \end{cases}$$

Si on note P la matrice de changement de base de (e_1°, e_2°) en (e_1, e_2) , alors :

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

D'où la matrice inverse :

$$P^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Cela permet d'exprimer e_1° et e_2° en fonction de e_1 et e_2 . On a alors :

$$\begin{cases} de_1 = \frac{d\theta}{r} e_2 \\ de_2 = -r d\theta e_1 + \frac{dr}{r} e_2 \end{cases}$$

Puis, en écrivant :

$$\begin{cases} de_1 = (\Gamma_{11}^1 dr + \Gamma_{21}^1 d\theta)e_1 + (\Gamma_{11}^2 dr + \Gamma_{21}^2 d\theta)e_2 \\ de_2 = (\Gamma_{12}^1 dr + \Gamma_{22}^1 d\theta)e_1 + (\Gamma_{12}^2 dr + \Gamma_{22}^2 d\theta)e_2 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = 0 \\ \Gamma_{22}^1 = -r \\ \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} \end{cases}$$

Coordonnées sphériques On rappelle qu'en coordonnées sphériques on a établi que :

$$\begin{cases} e_1 = \sin \theta \cos \phi e_1^\circ + \sin \theta \sin \phi e_2^\circ + \cos \theta e_3^\circ \\ e_2 = r \cos \theta \cos \phi e_1^\circ + r \cos \theta \sin \phi e_2^\circ - r \sin \theta e_3^\circ \\ e_3 = -r \sin \theta \sin \phi e_1^\circ + r \sin \theta \cos \phi e_2^\circ \end{cases}$$

Alors on a pour de_1 :

$$\begin{cases} de_1 \cdot e_1^\circ = \cos \theta \cos \phi d\theta - \sin \theta \sin \phi d\phi \\ de_1 \cdot e_2^\circ = \cos \theta \sin \phi d\theta + \sin \theta \cos \phi d\phi \\ de_1 \cdot e_3^\circ = -\sin \theta d\theta \end{cases}$$

Pour de_2 :

$$\begin{cases} de_2 \cdot e_1^\circ = dr \cos \theta \cos \phi - r \sin \theta \cos \phi d\theta + r \cos \theta \sin \phi d\phi \\ de_2 \cdot e_2^\circ = dr \cos \theta \sin \phi - r \sin \theta \sin \phi d\theta + r \cos \theta \cos \phi d\phi \\ de_2 \cdot e_3^\circ = -(dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta) \end{cases}$$

Et pour de_3 :

$$\begin{cases} de_3 \cdot e_1^\circ = -(dr \sin \theta \sin \phi + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi) \\ de_3 \cdot e_2^\circ = dr \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \cos \phi d\phi \\ de_3 \cdot e_3^\circ = 0 \end{cases}$$

En regroupant judicieusement les termes, on aboutit à :

$$\begin{cases} de_1 = \frac{d\theta}{r} e_2 + \frac{d\phi}{r} e_3 \\ de_2 = -r d\theta e_1 + \frac{dr}{r} e_2 + \cot \theta d\phi e_3 \\ de_3 = -r \sin^2 \theta d\phi e_1 - \sin \theta \cos \theta d\phi e_2 + \left(\frac{dr}{r} + \cot \theta d\theta\right) e_3 \end{cases}$$

En rappelant que :

$$de_i = \Gamma_{ki}^j du^k e_j$$

On obtient seulement 9 symboles non nuls :

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 = -r \\ \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta \\ \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta \end{cases}$$

Remarque : Le lecteur qui serait intéressé par le détail des calculs pourra se rapporter à [Hladik].

3.4 Le tenseur dérivée covariante d'un champ de tenseurs

Maintenant définis les symboles de Christoffel, nous sommes en mesure d'évaluer la variation des composantes d'un tenseur lorsque l'on passe d'un point M à un point M' infiniment voisin. Nous allons définir le tenseur dérivée covariante pour un champ de vecteurs et pour un champ de tenseurs d'ordre deux, mais la méthode proposée se généralise aisément à un champ de tenseurs d'ordre quelconque. Encore une fois, les développements proposés ne sont pas très rigoureux, et la justification théorique de ceux-ci sera présentée dans le chapitre 7 : le but est de comprendre le sens moral de ce tenseur.

3.4.1 Le tenseur dérivée covariante d'un champ de vecteurs

Soit v un champ de vecteurs sur un espace ponctuel \mathcal{E}_n . On cherche à estimer la variation de v lorsque l'on passe d'un point M à un point M' infiniment voisin. Pour cela, il faut transporter la valeur $v(M')$, valeur du champ v en M' , au point M puis calculer :

$$dv = \underbrace{v_M(M')}_{v(M') \text{ transporté en } M} - v_M(M)$$

Or :

$$dv = d(v^i e_i) = dv^i e_i + de_i v^i$$

Mais, d'après la définition des symboles de Christoffel, on a :

$$dv = dv^i e_i + \Gamma_{i k}^j e_j du^k v^i$$

C'est à dire :

$$dv = (dv^i + \Gamma_{j k}^i du^k v^j) e_i$$

ou :

$$dv = du^k (\partial_k v^i + \Gamma_{j k}^i v^j) e_i$$

Définition 3.14 : Tenseur dérivée covariante d'un champ de vecteurs

On appelle tenseur dérivée covariante d'un champ de vecteurs, le tenseur mixte d'ordre deux noté $\nabla_k v^i$, défini par :

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{j k}^i v^j$$

Remarque (1) : On admet que c'est effectivement un tenseur d'ordre deux mixte. La dérivation covariante fait donc gagner un degré de covariance.

Remarque (2) : Ce tenseur comporte deux termes distincts. Le premier ($\partial_k v^i$) est le terme usuel de variation, tandis que le second ($\Gamma_{j k}^i v^j$) est moralement un terme convectif qui mesure la variation élémentaire des vecteurs de bases.

Remarque (3) : On peut montrer que la dérivée covariante est linéaire et qu'elle vérifie une formule du type $(uv)' = u'v + uv'$.

Remarque (4) : La définition rigoureuse, que l'on donnera dans le chapitre 7, est un peu technique. Elle repose sur la notion de transport parallèle le long d'une courbe. Lors du transport de la valeur $v(M')$ au point M , on ne s'autorise pas n'importe quel déplacement : moralement, il faut que le vecteur garde un angle constant avec la tangente à la courbe.

3.4.2 Le tenseur dérivée covariante d'un champ de tenseurs d'ordre deux mixte

Soit $T = (t_i^j)$ un champ de tenseurs d'ordre deux mixte sur un espace ponctuel \mathcal{E}_n . La démarche sera exactement la même pour un tenseur deux fois covariant, ou deux fois contravariant. On cherche à estimer la variation de T lorsque l'on passe d'un point M à un point M' infiniment voisin.

Soient a et b deux champs de vecteurs uniformes. Formons la quantité (scalaire) :

$$t_i^j a^i b_j$$

La différentielle de ce scalaire, lorsque l'on passe de M à M' s'écrit :

$$d(t_i^j a^i b_j) = (t_i^j + \nabla t_i^j) a^i b_j - t_i^j a^i b_j = \nabla t_i^j a^i b_j$$

Mais :

$$d(t_i^j a^i b_j) = d(t_i^j) a^i b_j + t_i^j d(a^i) b_j + t_i^j a^i d(b_j)$$

Mais les champs a et b étant uniformes, on a :

$$da^i = -\omega_k^i a^k \quad db_j = -\omega_j^k b_k$$

Soit :

$$d(t_i^j a^i b_j) = (dt_i^j - t_l^j \omega_i^l + t_i^l \omega_l^j) a^i b_j$$

D'où finalement :

$$\nabla t_i^j = dt_i^j - t_l^j \omega_i^l + t_i^l \omega_l^j = (\partial_k t_i^j - t_l^j \Gamma_{ki}^l + t_i^l \Gamma_{kl}^j) du^k$$

Définition 3.15 : Tenseur dérivée covariante d'un champ de tenseurs

On appelle tenseur dérivée covariante d'un champ de tenseurs, le tenseur mixte d'ordre trois noté $\nabla_k t_i^j$, défini par :

$$\nabla_k t_i^j = \partial_k t_i^j - t_l^j \Gamma_{ki}^l + t_i^l \Gamma_{kl}^j$$

Remarque : On peut faire exactement les même remarques que pour la définition (3.14).

3.5 Equations des droites en coordonnées curvilignes

3.5.1 Equations dans un système quelconque de coordonnées curvilignes

Soit \mathcal{E}_n un espace ponctuel associé à un espace vectoriel E_n .

Soit un point mobile $M(t)$ de \mathcal{E}_n de coordonnées curvilignes $u^i(t)$. Le vecteur vitesse $v(t) = \frac{dM}{dt}$ de $M(t)$ a pour composantes contravariantes :

$$v^i = \frac{du^i}{dt}$$

Le vecteur accélération du point M est par définition $\gamma(t) = \frac{dv}{dt}$.

Mais, le vecteur dv ayant pour composantes contravariantes les différentielles absolues ∇v^i , le vecteur accélération a pour composantes contravariantes :

$$\gamma^i = \frac{\nabla v^i}{dt} = \frac{d^2 u^i}{dt^2} + \Gamma_{kj}^i \frac{du^k}{dt} \frac{du^j}{dt}$$

Or, dans un espace vectoriel E_n , les droites sont précisément les trajectoires d'accélération nulle, c'est à dire les trajectoires des particules libres. On en déduit donc l'équation des droites en coordonnées curvilignes :

$$\frac{d^2 u^i}{dt^2} + \Gamma_{kj}^i \frac{du^k}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0$$

3.5.2 Calcul effectif en coordonnées polaires

On rappelle que les coordonnées polaires sont les coordonnées :

$$\begin{cases} x^1 = r \in \mathbb{R}_+ \\ x^2 = \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

On écrit alors l'équation des géodésiques :

$$\begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0 \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

Puis on remplace les symboles de Christoffel par leurs valeurs, en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0 \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0 \end{cases}$$

On vérifie enfin que la solution de ces équations est :

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + s^2} \\ \theta = b + \arctan\left(\frac{s}{a}\right) \end{cases}$$

où a et b sont deux paramètres dépendant des conditions initiales. On retrouve bien l'équation des droites en coordonnées curvilignes.

Deuxième partie

Etude de la géométrie
pseudo-riemannienne

Chapitre 4

Variétés différentielles

Dans ce chapitre, nous allons introduire la notion très générale de variété. Parmi les variétés les plus simples figurent les courbes et surfaces du plan et de l'espace euclidien.

De façon générale, c'est un espace topologique abstrait, qui peut être "localement" vu comme un espace euclidien de dimension n , n étant la dimension de la variété.

La notion générale de variété en dimension n quelconque est due à Bernhard Riemann.

Les variétés se sont imposées comme le cadre naturel de nombreux problèmes de mathématiques et de physique, permettant de travailler dans un cadre plus vaste que celui, trop étroit, fourni par les espaces vectoriels. On donne parfois aux variétés le nom d'espaces courbes pour les distinguer des espaces euclidiens dits espaces plats.

4.1 Première approche : l'exemple de la sphère

Dans cette première partie, introduisons la notion de variété sur un exemple, celui de la sphère unité \mathbb{S}^2 de \mathbb{R}^3 . Nous allons voir que les singularités de la sphère (ses pôles) empêchent toute bijection globale avec \mathbb{R}^2 , ce qui signifie qu'il n'existe pas de coordonnées globales sur la sphère. Il est cependant possible d'introduire localement des systèmes de coordonnées, ces systèmes étant "compatibles" entre eux. Ce sont ces deux aspects qui font de la sphère \mathbb{S}^2 une variété.

Soit $\mathbb{S}^2 = \{x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 / x^1 = \cos \lambda \cos \phi, x^2 = \cos \lambda \sin \phi, x^3 = \sin \lambda, -\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi < 2\pi\}$ la sphère unité de \mathbb{R}^3 , paramétrée par la latitude λ et la longitude ϕ .

Les pôles : singularités de la sphère

Soit $D = \{(\lambda, \phi) \in \mathbb{R}^2 / -\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi < 2\pi\}$. L'application h :

$$h : D \rightarrow \mathbb{R}^3 : (\lambda, \phi) \mapsto (x^1(\lambda, \phi), x^2(\lambda, \phi), x^3(\lambda, \phi))$$

n'est pas injective.

Preuve : C'est évident car :

$$\begin{aligned} \forall \phi \in [0, 2\pi[, h(-\frac{\pi}{2}, \phi) &= (0, 0, -1) \quad \text{pôle sud} \\ \forall \phi \in [0, 2\pi[, h(\frac{\pi}{2}, \phi) &= (0, 0, 1) \quad \text{pôle nord} \end{aligned}$$

Ainsi la latitude λ et la longitude ϕ ne sont pas de bonnes coordonnées globales sur \mathbb{S}^2 . Il n'existe en fait pas de telles coordonnées globales sur \mathbb{S}^2 à cause des pôles.

En terme de différentielle, cela donne la proposition suivante :

Proposition :

La différentielle de l'application différentiable h n'est pas partout de rang maximum 2.

Preuve : h est clairement différentiable et sa matrice jacobienne J s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} \partial_\lambda x^1 & \partial_\phi x^1 \\ \partial_\lambda x^2 & \partial_\phi x^2 \\ \partial_\lambda x^3 & \partial_\phi x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \cos \phi & -\cos \lambda \sin \phi \\ -\sin \lambda \sin \phi & \cos \lambda \cos \phi \\ \cos \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Pour par exemple $\lambda = \frac{\pi}{2}$ (pôle nord) :

$$J = \begin{pmatrix} -\cos \phi & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le rang de J vaut 1.

Surmontons le problème des pôles issu de la tentative de paramétrisation globale de \mathbb{S}^2 . Introduisons deux systèmes de coordonnées :

$$U_1 = \{p \in \mathbb{S}^2 / x^3(p) > -\frac{1}{2}\}$$

$$U_2 = \{p \in \mathbb{S}^2 / x^3(p) < \frac{1}{2}\}$$

Soit alors Φ_1 la projection stéréographique de pôle sud :

$$\begin{aligned} \Phi_1 : U_1 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p = (x^1, x^2, x^3) &\mapsto (\xi_1, \eta_1) := \left(\frac{x^1}{1+x^3}, \frac{x^2}{1+x^3}\right) \end{aligned}$$

Et Φ_2 la projection stéréographique de pôle nord :

$$\begin{aligned} \Phi_2 : U_2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p = (x^1, x^2, x^3) &\mapsto (\xi_2, \eta_2) := \left(\frac{x^1}{1-x^3}, \frac{x^2}{1-x^3}\right) \end{aligned}$$

Chacun des systèmes de coordonnées est valable pour plus d'une demi-sphère, où U_1 est dépourvu du pôle sud, et U_2 est dépourvu du pôle nord. Les systèmes recouvrent la sphère :

$$U_1 \cup U_2 = \mathbb{S}^2$$

Proposition

L'application :

$$\begin{aligned} \Phi_2 \circ (\Phi_1)^{-1} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\xi_1, \eta_1) &\mapsto (\xi_2, \eta_2) \end{aligned}$$

est une bijection différentiable et sa différentielle est de rang maximum partout. Moralement, les deux systèmes de coordonnées sont "compatibles".

Preuve : On a donc :

$$\begin{cases} x^1 = (1 + x^3)\xi_1 \\ x^2 = (1 + x^3)\eta_1 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} (x^1)^2 + (x^2)^2 &= (1 + (x^3)^2)(\xi_1^2 + \eta_1^2) \\ \Rightarrow 1 - (x^3)^2 &= (1 + (x^3)^2)(\xi_1^2 + \eta_1^2) \\ \Rightarrow (1 - x^3) &= (1 + x^3)(\xi_1^2 + \eta_1^2) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{cases} \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{1-x^3}{1+x^3} \\ \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{1-x^3}{1+x^3} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \xi_2 = \frac{\xi_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} \\ \eta_2 = \frac{\eta_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} \end{cases}$$

Le changement de coordonnées $(\xi_1, \eta_1) \mapsto (\xi_2, \eta_2)$ sur $U_1 \cap U_2$ est défini par :

$$(\xi_1, \eta_1) \mapsto \left(\frac{\xi_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2}, \frac{\eta_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} \right)$$

Cette application $\Phi_2 \circ (\Phi_1)^{-1}$ est une bijection différentiable et sa différentielle est de rang maximum partout car sa jacobienne s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} \partial_{\xi_1} \xi_2 & \partial_{\eta_1} \xi_2 \\ \partial_{\xi_1} \eta_2 & \partial_{\eta_1} \eta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2} \begin{pmatrix} \eta_1^2 - \xi_1^2 & -2\eta_1 \xi_1 \\ -2\eta_1 \xi_1 & \xi_1^2 - \eta_1^2 \end{pmatrix}$$

de déterminant :

$$\frac{-1}{(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2} \neq 0$$

Remarque : À travers cet exemple, nous avons vu qu'il est possible de paramétrer localement la sphère, c'est à dire d'introduire localement des systèmes de coordonnées, ces systèmes étant "compatibles" entre eux. Cette propriété place la sphère dans une catégorie d'espaces très généraux : les variétés différentielles.

4.2 Notion de variété différentielle

Dans cette partie, nous allons munir un espace topologique V d'une structure de variété en se basant sur l'idée, conformément à l'exemple de la sphère, que l'on peut localement munir V d'un système de coordonnées : tout élément de V possède donc des coordonnées locales. On impose de plus que si un point de V appartient à deux systèmes de coordonnées distincts, alors les systèmes doivent être "compatibles" entre eux.

L'idée principale est de pouvoir rendre possible du calcul différentiel sur des espaces "tordus", en se ramenant localement à des espaces sur lesquels on sait effectivement faire du calcul différentiel (typiquement \mathbb{R}^n).

Soit donc V un ensemble d'éléments appelés points : cet espace V remplace les espaces ponctuels avec lesquels on a travaillé jusqu'à présent. Munissons V d'une topologie en considérant que tout point de V appartient à au moins un ouvert U_i de V .

4.2.1 Carte, coordonnées locales et atlas

Définition 4.1 : Carte

Une carte locale sur V , appelée plus simplement carte sur V , est la donnée d'un couple (U_i, Φ_i) formé d'un ouvert U_i de V , et d'un homéomorphisme Φ_i de U_i sur un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n , pour un certain n entier naturel non nul.

On dit que U_i est le domaine de la carte.

Remarque : La continuité de Φ_i est la continuité dans les espaces topologiques (les préimages des ouverts sont des ouverts).

Définition 4.2 : Coordonnées locales

Les coordonnées locales $(x^i)_{1 \leq i \leq n}$ d'un point p du domaine U d'une carte (U_i, Φ_i) de V sont les coordonnées du point $\Phi_i(p)$ de \mathbb{R}^n .

Remarque : Une carte définit donc un système de coordonnées locales.

Un point p quelconque de V peut appartenir à deux ouverts distincts U_j et U_k : notons (U_j, Φ_j) et (U_k, Φ_k) les cartes correspondantes.

Les coordonnées de $\Phi_j(p)$ et de $\Phi_k(p)$ sont a priori différentes : on veut alors que le changement de coordonnées entre celles-ci soit "agréable", c'est à dire suffisamment régulier. On va définir pour cela la notion de compatibilités entre deux cartes.

Notons $\tilde{\Phi}_j^{-1}$ la restriction de Φ_j^{-1} à $\Phi_j(U_j \cap U_k)$.

Définition 4.3 : Compatibilité entre deux cartes

Soient deux ouverts distincts U_j et U_k de V non disjoints.

Deux cartes (U_j, Φ_j) et (U_k, Φ_k) sur V sont dites C^q -compatibles ($q \geq 1$) si $\Phi_k \circ \tilde{\Phi}_j^{-1}$ est un difféomorphisme de classe C^q entre les ouverts $\Phi_j(U_j \cap U_k)$ et $\Phi_k(U_j \cap U_k)$ de \mathbb{R}^n .

On définit une notion équivalente en terme de coordonnées.

Définition 4.4 : Admissibilité d'un changement de coordonnées

Un changement de carte (U_j, Φ_j) en (U_k, Φ_k) induit un changement de coordonnées locales du point p . Ce changement de coordonnées est dit admissible s'il existe un difféomorphisme de classe C^q entre les ouverts $\Phi_j(U_j \cap U_k)$ et $\Phi_k(U_j \cap U_k)$ de \mathbb{R}^n :

$$\Phi_k \circ \tilde{\Phi}_j^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x'^1, \dots, x'^n)$$

c'est à dire si les fonctions $(f^i)_{1 \leq i \leq n}$ qui définissent les changements de coordonnées :

$$x'^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$$

admettent des dérivées partielles continues à l'ordre q , par rapport aux variables $(x^k)_{1 \leq k \leq n}$.

La donnée d'une carte permet localement de se placer dans \mathbb{R}^n , ce qui permet de nous ramener à un cadre sympathique pour introduire du calcul différentiel. Le but est alors de recouvrir l'espace V par un ensemble de cartes pour pouvoir, en tout point, se ramener à \mathbb{R}^n . On définit pour cela la notion d'atlas, et de compatibilités entre atlas et cartes. On définit alors la notion d'atlas maximal.

Définition 4.5 : Atlas

Un atlas de classe C^q sur V est un ensemble A de cartes (U_i, Φ_i) telles que :

- les domaines U_i des cartes forment un recouvrement de V ;
- toutes cartes $(U_i, \Phi_i), (U_j, \Phi_j)$ (U_i et U_j non disjoints) de A sont C^q -compatibles.

Définition 4.6 : Compatibilité entre une carte et un atlas

Soit A un atlas de classe C^q sur V . Une carte (U_i, Φ_i) est compatible avec l'atlas A si $U_i \cup A$ est encore un atlas de classe C^q sur V .

Définition 4.7 : Compatibilité entre deux atlas

Deux atlas de classe C^q sur V sont compatibles si leur réunion est encore un atlas de classe C^q sur V .

Définition 4.8 : Atlas maximal

Soit A un atlas de classe C^q sur V . On appelle atlas maximal de classe C^q sur V , l'atlas \bar{A} se composant de toutes les cartes compatibles avec l'atlas A .

Nous avons maintenant introduit les notions nécessaires pour définir une variété différentielle.

4.2.2 Variété différentielle

Définition 4.9 : Variété différentielle

Une variété différentielle de classe C^q est un couple formé d'un espace topologique V et d'un atlas maximal \bar{A} de classe C^q sur V .

La dimension de la variété différentielle est par définition la dimension n de l'espace \mathbb{R}^n associé : on note alors V_n une variété de dimension n .

Remarque : On ne considèrera par la suite que des espaces topologiques dont la topologie définie par les domaines des cartes est dénombrable. On ne considèrera donc que des espaces séparables.

Exemples :

(1) L'espace \mathbb{R}^n est une variété pour l'atlas maximal $\bar{A} = \{(\mathbb{R}^n, \text{Id})\}$, composé d'une seule carte $(\mathbb{R}^n, \text{Id})$.

(2) Soit $\mathbb{S}^1 = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 / (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1\}$ le cercle unité, muni de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^2 . Il n'est évidemment pas homéomorphe à \mathbb{R} (arguments de connexité par exemple). Montrons cependant que c'est une variété différentielle de dimension 1 pour l'atlas A défini ci-dessous par la donnée des deux cartes (U_1, Φ_1) et (U_2, Φ_2) définies par :

$$U_1 = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{S}^1 / x^1 < 1\}$$

$$\Phi_1 : U_1 \rightarrow]0, 2\pi[$$

$$(x^1 = \cos \theta, x^2 = \sin \theta) \mapsto \theta$$

Et :

$$U_2 = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{S}^1 / x^1 > -1\}$$

$$\Phi_2 : U_2 \rightarrow]-\pi, \pi[$$

$$(x^1 = \cos \theta, x^2 = \sin \theta) \mapsto \theta$$

Ce sont bien des cartes (Φ_1 et Φ_2 sont bien des homéomorphismes).

On vérifie alors que A est bien un atlas C^1 (et même C^∞) puisque d'une part $U_1 \cup U_2$ recouvre bien \mathbb{S}^1 , et que d'autre part $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ est un C^1 -difféomorphisme (et même C^∞ -difféomorphisme) entre les ouverts $\Phi_2(U_1 \cap U_2)$ et $\Phi_1(U_1 \cap U_2)$ de \mathbb{R} .

(3) Plus généralement, soit $\mathbb{S}^n = \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1\}$ la sphère unité de \mathbb{R}^{n+1} , muni de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^{n+1} . C'est une variété C^1 de dimension n pour l'atlas A défini par la donnée des $2n+2$ cartes (U_i^+, Φ_i^+) et (U_i^-, Φ_i^-) ($1 \leq i \leq n+1$) définies par :

$$U_i^+ = \{x \in \mathbb{S}^n / x^i > 0\}$$

$$\Phi_i^+ : U_i^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^n)$$

où le signe \hat{x}^i signifie que l'on enlève la i -ème coordonnée. De même, on définit :

$$U_i^- = \{x \in \mathbb{S}^n / x^i < 0\}$$

$$\begin{aligned} \Phi_i^- : U_i^- &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x = (x^1, \dots, x^n) &\mapsto (x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^n) \end{aligned}$$

La sphère \mathbb{S}^n est bien un recouvrement de telles cartes. De plus, pour x quelconque dans $U_i^+ \cap U_j^+$, l'application entre ouverts de \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} \Phi_j^+ \circ (\Phi_i^+)^{-1} : \Phi_i^+(U_i^+ \cap U_j^+) &\rightarrow \Phi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) \\ x = (x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1}) &\mapsto (x^1, \dots, x^{i-1}, \sqrt{1 - \sum_{k=1, k \neq i}^{n+1} (x^k)^2}, x^{i+1}, \dots, \hat{x}^j, \dots, x^{n+1}) \end{aligned}$$

est bien un C^1 -difféomorphisme puisque l'expression sous la racine-carée est strictement positive.

4.2.3 Variété produit

Soit X_n une variété de classe C^q de dimension n , définie par un atlas :

$$A = \{(U_i, \Phi_i), i \in I\}$$

Soit Y_m une variété de classe C^q de dimension m , définie par un atlas :

$$\tilde{A} = \{(V_j, \Psi_j), j \in J\}$$

Définition 4.10 : Atlas produit

L'atlas produit noté $A \times \tilde{A}$ est :

$$\{(U_i \times V_j, \Phi_i \times \Psi_j), (i, j) \in I \times J\}$$

où :

$$U_i \times V_j = \{(x_i, y_j) / x_i \in U_i, y_j \in V_j\}$$

$$\Phi_i \times \Psi_j : U_i \times V_j \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : (x, y) \mapsto (\Phi_i(x), \Psi_j(y))$$

Remarque : Le lecteur vérifiera aisément que l'atlas produit a bien les propriétés d'un atlas.

Définition 4.11 : Variété produit

Soient X_n et Y_m deux variétés de classe C^q de dimension respectivement n et m . Alors la variété produit $X_n \times Y_m$ est la variété de classe C^q définie par l'atlas produit des atlas de X_n et Y_m .

Sa dimension est la somme $n + m$ des dimensions de chacune des variétés.

Exemples :

(1) Le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ est la variété produit de dimension 2 des deux cerles \mathbb{S}^1 .

(2) Le cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ est la variété produit de dimension 2 du cercle \mathbb{S}^1 et de la droite réelle.

4.3 Applications différentiables de variétés

Introduisons la notion d'application de classe C^q entre variétés différentiables grâce à la notion de cartes.

Soit V_n, W_m deux variétés de classe C^p , f une application continue de V_n dans W_m , et x un point de V_n .

Définition 4.12 : Application différentiable de classe C^q en un point (1)

Une application f continue de V_n dans W_m est de classe C^q ($q \leq p$) au point x de V_n si pour toute carte (U, Φ) de V_n contenant x , et pour toute carte (V, Ψ) de W_m telle que $y = f(x) \in V$, l'application appelée "représentation locale de f :

$$f_{\Phi\Psi} := \Psi \circ f \circ \Phi^{-1} : \Phi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

est de classe C^q .

Remarque : Le continuité de f est indispensable pour assurer que $f^{-1}(V)$ soit bien un ouvert.

On peut traduire la définition précédente en terme de coordonnées. Soit (x^1, \dots, x^n) les coordonnées locales du point x dans la carte (U, Φ) , et soit (y^1, \dots, y^m) les coordonnées locales du point $y = f(x)$ dans la carte (V, Ψ) .

Proposition 4.13 : Application différentiable de classe C^q en un point (2)

Une application f continue de V_n dans W_m est de classe C^q ($q \leq p$) au point x de V_n si les m coordonnées locales y^i du point $y = f(x)$ sont, au voisinage de x , les m fonctions f^i de classe C^q :

$$y^i = f^i(x^j), \quad 1 \leq j \leq n$$

des n coordonnées x^j du point x .

On peut alors définir une notion globale de C^q -différentiabilité.

Définition 4.14 : Application différentiable de classe C^q

Une application f continue de V_n dans W_m est de classe C^q ($q \leq p$) de V_n dans W_m , si pour tout x de V_n , à une carte quelconque (V, Ψ) de W_m est associée une carte (U, Φ) de V_n avec $x \in U$, $f(x) \in f(U) \subset V$ et si :

$$f_{\Phi\Psi} := \Psi \circ f \circ \Phi^{-1} : \Phi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

est de classe C^q .

Notation : $C^q(V_n, W_m)$ désigne l'ensemble des applications de classe C^q de V_n dans W_m .

Proposition 4.15 : Composition d'applications différentiables de classe C^q (admise)

La composition d'applications de classe C^q entre variétés est une application différentiable de classe C^q .

On peut maintenant définir la notion de C^q -difféomorphisme.

Définition 4.16 : C^q -difféomorphisme (1)

Une application f continue de V_n dans W_n est un C^q -difféomorphisme de V_n sur W_n si f est une bijection de $C^q(V_n, W_n)$ et si f^{-1} est dans $C^q(W_n, V_n)$.

Notation : $D^q(V_n, W_m)$ désigne l'ensemble des C^q -difféomorphismes de V_n sur W_m .

On peut définir de manière équivalente un C^q -difféomorphisme en terme de coordonnées.

Proposition 4.17 : C^q -difféomorphisme (2)

Une bijection f continue de V_n dans W_n est un C^q -difféomorphisme de V_n sur W_n si et seulement si en coordonnées x^i , les n fonctions différentiables f^j :

$$f^j(x^i), 1 \leq i \leq n$$

définissant f sont à jacobien non nul.

4.4 Notion de sous-variété

Il est très utile en pratique d'avoir une caractérisation des sous-variétés, pour éviter de se ramener à chaque fois à la définition.

4.4.1 Sous-variétés de \mathbb{R}^n

Définition 4.18 : Sous-variétés de \mathbb{R}^n

Une partie V de \mathbb{R}^n est une sous-variété de \mathbb{R}^n , de dimension m ($m \leq n$) et de classe C^q si, pour tout x de V , il existe un ouvert U_x de \mathbb{R}^n contenant x et un C^q -difféomorphisme g de U_x sur l'ouvert $g(U_x)$ de \mathbb{R}^n tel que :

$$g(U_x \cap V) = g(U_x) \cap \mathbb{R}^m$$

Etablissons quelques propositions pour arriver à une caractérisation pratique des sous-variétés.

Proposition 4.19 : (admise)

Soit $f : U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application de classe C^q , y un point de \mathbb{R}^m , $V = f^{-1}(y)$.
Si la matrice jacobienne de f est de rang m en tout point de V , alors V est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $n - m$.

Proposition 4.20 :

Soit $f^i : U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ m applications de classe C^q et :

$$V = \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n / f^i(x^1, \dots, x^n) = 0, 1 \leq i \leq m\}$$

Si, pour tout x de V , le rang de la matrice jacobienne :

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

est $m \leq n$, alors V est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $n - m$.

Preuve : C'est une conséquence directe de la proposition 4.19 avec :

$$f(x^1, \dots, x^n) = (f^1(x^1, \dots, x^n), \dots, f^m(x^1, \dots, x^n),)$$

Et :

$$y = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$$

Remarque : Les sous-variétés de \mathbb{R}^n sont ainsi définies comme une intersection d'hypersurfaces.

Exemple : Une ellipse est une sous-variété de \mathbb{R}^3 de dimension 1. Soit, en effet l'ellipse :

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, z = 0 \right\}$$

La matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 en tout point de V .

Un cas particulier de la proposition précédente est le suivant.

Proposition 4.21 :

Soit $f : U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ une applications de classe C^q et :

$$V = \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n / f(x^1, \dots, x^n) = 0\}$$

Si, pour tout x de V , une des dérivées partielles de f est non nulle, alors V est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $n - 1$.

Exemples : L'hyperboloïde à une nappe d'équation :

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

est une sous-variété de \mathbb{R}^3 de dimension 2. En effet, f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 et son gradient $(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, -\frac{2z}{c^2})$ est non nul en tout point de l'hyperboloïde.

Il est alors immédiat qu'une sphère de rayon r ($x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$), qu'un ellipsoïde ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$), qu'un hyperboloïde à deux nappes ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$) et qu'un parabolôïde elliptique ($z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$) sont des sous-variétés de \mathbb{R}^3 de dimension 2.

4.4.2 Sous-variétés de variétés

Définissons maintenant les sous-variétés de variétés autres que \mathbb{R}^n .

Définition 4.22 :

Soit V_n une variété de classe C^q et de dimension n . Une partie W de V_n est une sous-variété de V_n de classe C^q et de dimension m ($m \leq n$), si pour tout x de W , il existe une carte (U, Φ) de V_n contenant x telle que :

$$\Phi(U \cap W) = \Phi(U) \cap \mathbb{R}^m$$

Soit $f^i : V_n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f^i(x)$ m fonctions différentiables sur V_n définissant une application différentiable :

$$f : V_n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto (f^1(x), \dots, f^m(x))$$

On a alors la caractérisation pratique suivante :

Proposition 4.23 : (admise)

Un sous-ensemble W de V_n défini par les m équations $f^i(x) = 0$, f étant de rang m en tout point de W , est une sous-variété différentiable de V_n de dimension $n - m$.

Chapitre 5

Espace vectoriel tangent

Une des propriétés majeure des variétés différentielles est la possibilité de définir localement un espace vectoriel tangent à la variété. Cet espace, de même dimension que la variété, généralise la notion d'espace tangent pour les surfaces de l'espace euclidien.

Dans la théorie de la relativité, et nous le verrons au chapitre 8, cet espace tangent est l'espace-temps de la relativité restreinte, alors que l'espace-temps de la relativité générale est la variété elle-même.

5.1 Vecteur tangent

5.1.1 Arcs de courbes tangents - Première définition des vecteurs tangents

Soit V_n une variété différentielle de classe quelconque. Par la suite, on dira souvent variété différentielle et on sous-entendra de classe quelconque.

Soit I un intervalle appartenant à \mathbb{R} contenant 0 et p_0 un point de V_n .

Définition 5.1 : Arc de courbe

Un arc de courbe passant par p_0 est une application différentiable c :

$$\begin{cases} c : I \rightarrow V_n : t \mapsto c(t) \\ c(0) = p_0 \end{cases}$$

Remarque : On définit ainsi, à chaque instant t , un point de V_n : on dit que c est un arc de courbe de paramètre t . Pour la suite de notre étude, c est considéré de classe C^1 au moins.

Soit c un arc de courbe de V_n , et (U, Φ) une carte locale.

Définition 5.2 : Lecture d'un arc

La lecture de l'arc c dans la carte (U, Φ) est l'application :

$$\Phi \circ c : I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto \Phi(c(t)) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

Le but est de donner un sens à la tangence entre deux arcs de courbes. La lecture de l'arc permet de nous ramener dans \mathbb{R}^n , on peut donc parler de dérivée. Soit (U, ϕ) une carte de V_n , p_0 un point de U et c_1, c_2 deux arcs de courbes de V_n passant par p_0 .

Définition 5.3 : Tangence de deux arcs de courbes par rapport à Φ

Deux arcs de courbes c_1 et c_2 sont tangents en p_0 par rapport à Φ si les applications $\Phi \circ c_1$ et $\Phi \circ c_2$ sont tangentes en 0, c'est à dire si :

$$\begin{cases} c_1(0) = c_2(0) \\ \frac{d}{dt}(\Phi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\Phi \circ c_2)(0) \end{cases}$$

A partir de cette définition nous avons envie de définir la notion de tangence de deux arcs de courbes sans faire intervenir une application Φ particulière : montrons que le choix de Φ est arbitraire.

Soient (U_1, Φ_1) et (U_2, Φ_2) deux cartes locales contenant p_0 .

Proposition 5.4 :

Deux arcs c_1 et c_2 sont tangents en p_0 par rapport à Φ_1 si et seulement si ils sont tangents en p_0 par rapport à Φ_2 .

Preuve : Montrons que si c_1 et c_2 sont tangents en p_0 par rapport à Φ_1 alors ils le sont par rapport à Φ_2 , la réciproque se montrant de la même manière.

Comme $c_1(0) = c_2(0)$, indépendamment de la fonction Φ choisie, montrons alors que :

$$\frac{d}{dt}(\Phi_1 \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\Phi_1 \circ c_2)(0) \Rightarrow \frac{d}{dt}(\Phi_2 \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\Phi_2 \circ c_2)(0)$$

Par hypothèse on sait que p_0 appartient à U_1 et U_2 donc leur intersection n'est pas vide. On peut donc travailler sur l'ouvert $U_1 \cap U_2$, c'est à dire :

$$\begin{cases} c_1 : I \rightarrow U_1 \cap U_2 : t \mapsto c_1(t) \\ c_2 : I \rightarrow U_1 \cap U_2 : t \mapsto c_2(t) \\ \Phi_1 : U_1 \cap U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \Phi_2 : U_1 \cap U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n \end{cases}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{cases} \Phi_2 \circ c_1 = (\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}) \circ (\Phi_1 \circ c_1) \\ \Phi_2 \circ c_2 = (\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}) \circ (\Phi_1 \circ c_2) \end{cases}$$

Comme $\Phi_2[c_i(t)]$, $\Phi_2[\Phi_1^{-1}(t)]$ et $\Phi_1[c_i(t)]$ (pour $i = 1, 2$) appartiennent à \mathbb{R}^n on peut appliquer la dérivation de fonctions composées :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Phi_2 \circ c_1)(0) &= \frac{d}{dt}[(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}) \circ (\Phi_1 \circ c_1)](0) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\Phi_2 \circ c_1)(0) &= \frac{d}{dt}[(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1})_{\Phi_1 \circ c_1(0)} \frac{d}{dt}(\Phi_1 \circ c_1)](0) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\Phi_2 \circ c_1)(0) &= \frac{d}{dt}[(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1})_{\Phi_1 \circ c_2(0)} \frac{d}{dt}(\Phi_1 \circ c_2)](0) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\Phi_2 \circ c_1)(0) &= \frac{d}{dt}[(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}) \circ (\Phi_1 \circ c_2)](0) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\Phi_2 \circ c_1)(0) &= \frac{d}{dt}(\Phi_2 \circ c_2)(0) \end{aligned}$$

Remarque : La notion de tangence est donc indépendante du choix de la carte. On a finalement la définition suivante :

Définition 5.5 : Tangence de deux arcs de courbes

Deux arcs de courbes c_1 et c_2 sont tangents en p_0 si :

$$\begin{cases} c_1(0) = c_2(0) \\ \frac{d}{dt}(\Phi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\Phi \circ c_2)(0) \end{cases}$$

Notation : En coordonnées locales, en posant :

$$\begin{aligned} (\Phi \circ c_1)(t) &= (x^1, \dots, x^n) \\ (\Phi \circ c_2)(t) &= (y^1, \dots, y^n) \end{aligned}$$

La définition (5.5) se réécrit :

$$\begin{cases} x^i(0) = y^i(0) \quad \forall i = 1, \dots, n \\ \frac{dx^i}{dt}(0) = \frac{dy^i}{dt}(0) \end{cases}$$

On vérifie aisément que la notion d'arcs de courbes tangents en un point p_0 de V_n est une relation d'équivalence sur l'ensemble des arcs de courbes. Une classe d'équivalence d'arcs de courbes tangents en p_0 est notée $[c]_{p_0}$, c étant un représentant de la classe.

Définition 5.6 : Vecteur tangent (1)

Un vecteur tangent à V_n , en p_0 , est une classe d'équivalence $[c]_{p_0}$ d'arcs de courbes tangents en p_0 .

Remarque : On dit que les arcs de courbes de la classe d'équivalence ont même vecteur tangent en p_0 .

5.1.2 Fonction le long d'une courbe et tangence

Notation : $C^\infty(p_0)$ (p_0 point de V_n) désigne l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur tout voisinage ouvert de p_0 .

Soit g, h dans $C^\infty(p_0)$, et c un arc de courbe de V_n .

Définition 5.7 :

On dit que g et h ont le même germe en p_0 s'il existe un voisinage ouvert U de p_0 tel que $g|_U = h|_U$

Remarque : On obtient ainsi un relation d'équivalence dans $C^\infty(p_0)$.

Définition 5.8 :

Un germe de fonction différentiable g , en p_0 , est la classe d'équivalence des fonctions différentiables coïncidant dans un voisinage ouvert U de p_0 .

Notation : $O(U)$ désigne l'ensemble des germes de fonctions différentiables dans un voisinage ouvert U de p_0 .

Définition 5.9 : Fonction le long d'un arc de courbe

La fonction g le long de l'arc de courbe c est la fonction :

$$g \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto (g \circ c)(t)$$

Proposition 5.10 :

Deux arcs de courbes c_1 et c_2 ont même vecteur tangent au point p_0 de V_n si et seulement si pour tout g dans $O(U)$:

$$\frac{d}{dt}(g \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(g \circ c_2)(0)$$

Preuve : En effet, on a :

$$\begin{aligned} g \circ c_1 &= (g \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ c_1) \\ \Rightarrow g \circ c_2 &= (g \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ c_2) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(g \circ c_1)(0) &= \frac{d}{dt}[(g \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ c_1)](0) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(g \circ c_1)(0) &= \frac{d}{dt}[(g \circ \Phi^{-1})_{(\Phi \circ c_1)(0)} \frac{d}{dt}(\Phi \circ c_1)](0) \end{aligned}$$

Or d'après la définition 5.5 on sait que :

$$\begin{cases} c_1(0) = c_2(0) \\ \frac{d}{dt}(\Phi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\Phi \circ c_2)(0) \end{cases}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[(g \circ \Phi^{-1})_{(\Phi \circ c_1)(0)} \frac{d}{dt}(\Phi \circ c_1)](0) &= \frac{d}{dt}[(g \circ \Phi^{-1})_{(\Phi \circ c_2)(0)} \frac{d}{dt}(\Phi \circ c_2)](0) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(g \circ c_1)(0) &= \frac{d}{dt}(g \circ c_2)(0) \end{aligned}$$

On a alors naturellement la proposition suivante.

Proposition 5.11 :

Tous les arcs de courbes c_i ayant même vecteur tangent en p_0 sont caractérisés par une même valeur, à g dans $O(U)$ donnée, de :

$$\frac{d}{dt}(g \circ c_i)(0)$$

Remarque : Rappelons que g est une fonction de V_n à valeurs dans \mathbb{R} , et que Φ est une fonction de V_n à valeurs dans \mathbb{R}^n .

D'après l'expression $g \circ c = (g \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ c)$ on voit que $g \circ c$ représente la lecture de la courbe c dans la carte suivie de la lecture de g sur la carte.

Notation : La lecture de g sur la carte (U, Φ) sera notée comme suit :

$$g \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (g \circ \Phi^{-1})(x^1, \dots, x^n) \equiv \bar{g}(x^i) \quad \forall i = 1 \dots n$$

Proposition 5.12 :

Un vecteur tangent à V_n en p_0 est caractérisé par la même valeur $\frac{d}{dt}(g \circ c)(0)$, pour tout g dans $O(U)$. Cette quantité vaut :

$$\frac{d}{dt}(g \circ c)(0) = \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial x^i} \right)_{x_0} \frac{dx^i}{dt}(0)$$

Remarque : On pose $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$, les coordonnées de p_0 dans V_n .

On le montre en se ramenant à $g \circ c = (g \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ c)$ et grâce à la règle de dérivation de fonction composées :

$$\begin{aligned}
 g \circ c(t) &= (g \circ \Phi^{-1}) \circ (\Phi \circ c)(t) \\
 \Rightarrow g \circ c(t) &= (g \circ \Phi^{-1})(\Phi \circ c)(t) \\
 \Rightarrow g \circ c(t) &= (g \circ \Phi^{-1})(x^1(t), \dots, x^n(t)) \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt}(g \circ c)(0) &= \frac{\partial g \circ \Phi^{-1}}{\partial x^i}(x_0) \frac{dx^i}{dt}(0) \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt}(g \circ c)(0) &= \frac{\partial \bar{g}}{\partial x^i}(x_0) \frac{dx^i}{dt}(0)
 \end{aligned}$$

Nous avons énoncé une définition et quelques propriétés du vecteur tangent en un point p_0 de V_n . Voyons maintenant une seconde définition, moins intuitive et plus conceptuelle, qui s'appuie sur la dérivée dite au sens de Leibniz.

5.1.3 Dérivation au sens de Leibniz - Deuxième définition des vecteurs tangents

Définition 5.13 : Application de dérivation au sens de Leibniz

Une application $X_{p_0} : O(U) \rightarrow \mathbb{R} : g \mapsto X_{p_0}(g)$ est dite de dérivation au sens de Leibniz si :

$$\begin{cases} \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall g, h \in O(U) : X_{p_0}(ag + bh) = aX_{p_0}(g) + bX_{p_0}(h) \\ \forall g, h \in O(U) : X_{p_0}(gh) = g(p_0)X_{p_0}(h) + h(p_0)X_{p_0}(g) \end{cases}$$

Définition 5.14 : Dérivée dans une direction de tangence en un point de V_n

On appelle dérivée de g dans la direction de tangence indiquée par X_{p_0} au point p_0 de V_n l'application X_{p_0} :

$$X_{p_0} : O(U) \rightarrow \mathbb{R} : g \mapsto \frac{d}{dt}(g \circ c)(0) = \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial x^i} \right)_{x_0} \frac{dx^i}{dt}(0)$$

pour une classe d'équivalence de courbes c . On vérifie aisément que cette application est de dérivation au sens de Leibniz.

Remarque : Soit U un ouvert de V_n et p_0 un point de U . Considérons la fonction x^i de $O(U)$:

$$x^i : U \subset V_n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^i$$

où x^i représente la i -ème coordonnée de x lu dans \mathbb{R}^n .

On a clairement :

$$X_{p_0}(x^i) = \frac{dx^i}{dt}(0)$$

En posant $X^i := X_{p_0}(x^i)$ on écrit alors pour tout g de $O(U)$:

$$X_{p_0}(g) = X^i \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial x^i} \right)_{x_0} \quad \text{avec la convention d'Einstein}$$

La proposition suivante est alors évidente.

Proposition 5.15 : Vecteur tangent (2)

Un vecteur tangent est une application, dans $O(U)$ à valeurs dans \mathbb{R} , de dérivation au sens de Leibniz.

La réciproque existe et cela constitue la proposition (5.16). On ne la démontre pas.

Proposition 5.16 : (admise)

Toute application linéaire de dérivation au sens de Leibniz dans $O(U)$ à valeurs dans \mathbb{R} est un vecteur tangent en p_0 .

5.2 Espace vectoriel tangent

Définissons l'espace vectoriel tangent à partir de la notion de vecteur tangent.

5.2.1 Définition d'un espace vectoriel tangent

Soit p_0 un point d'une variété différentielle V_n .

Définition 5.17 : Espace vectoriel tangent

L'espace vectoriel tangent à V_n , au point p_0 , est l'ensemble des classes d'équivalences des courbes de V_n tangentes en p_0 . De manière équivalente, c'est l'ensemble des vecteurs tangents à V_n en p_0 .

Remarque : On vérifie aisément la structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} de l'espace tangent.

Notation : L'espace vectoriel tangent au point p_0 de V_n est noté $T_{p_0}V_n$.

Pour résumer : $T_{p_0}V_n = \{[c]_{p_0}\} = \{X_{p_0}\}$ où X_{p_0} représente un vecteur tangent à V_n en p_0 dans une des directions de tangence, celle qui correspond à un $X^i = \frac{dx^i}{dt}(0)$ particulier.

5.2.2 Base et dimension d'un espace vectoriel tangent

Notation : On notera $X_{p_0}g \in \mathbb{R}$ la dérivée du germe de g dans la direction de X , au point p_0 .
On a :

$$X_{p_0}g = X^i \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial x^i} \right)_{x_0}$$

Avec $\bar{g} = g \circ \Phi^{-1}$, une expression d'un vecteur tangent en p_0 dans la direction X^i est, pour $i = 1, \dots, n$:

$$X_{p_0}(\cdot) = X^i \left(\frac{\partial \cdot \circ \Phi^{-1}}{\partial x^i} \right)_{x_0}$$

Notation : Pour simplifier les écritures nous noterons :

$$\left(\frac{\partial \cdot}{\partial x^i} \right)_{x_0} = \left(\frac{\partial \cdot \circ \Phi^{-1}}{\partial x^i} \right)_{x_0}$$

Proposition 5.18 : Dimension d'un espace vectoriel tangent

L'espace tangent à V_n , au point p_0 , forme un espace vectoriel de dimension n .

Preuve : En effet, d'après le rappel ci-dessus on voit que X_{p_0} est une combinaison linéaire au plus de n vecteurs tangents à V_n au point p_0 .

$$\left(\frac{\partial \cdot}{\partial x^i} \right)_{x_0} : 0(U) \rightarrow \mathbb{R} : g \mapsto \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial x^i} \right)_{x_0}$$

Donc l'espace vectoriel tangent est généré par une combinaison linéaire de au plus n vecteurs donc la dimension de $T_{p_0}V_n$ est inférieure ou égale à n .

De plus, les vecteurs $\left(\frac{\partial \cdot}{\partial x^i} \right)_{x_0}$ sont linéairement indépendants. Sinon il existerait des réels λ_i non tous nuls tels que :

$$\lambda_i \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x^i} \right)_{x_0} = 0$$

Mais, pour toute fonction $x^j : x \mapsto x^j$, si ces réels existaient on aurait :

$$\lambda_i \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^i} \right)_{x_0} = 0 = \lambda_i \delta_i^j = \lambda_j$$

Ce qui permet de conclure. On a donc bien :

$$\dim(T_{p_0}V_n) = n$$

On a donc défini une base de l'espace vectoriel tangent.

Définition 5.19 : Base naturelle

La famille de vecteurs tangents $e_i = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x^i} \right)_{x_0}$ constitue une base de $T_{p_0}V_n$. Cette base, locale, est appelée base naturelle de $T_{p_0}V_n$ relativement au système de coordonnées (x^i) .

Notation : On note $X_{p_0} = X^i e_i$

5.2.3 Changement de base naturelle d'un espace vectoriel tangent

Envisageons deux bases naturelles de $T_{p_0}V_n$ relativement à deux systèmes de coordonnées différents (avec la convention de l'indice primé) :

$$\left(\frac{\partial \cdot}{\partial x^i}\right)_{x_0} \longleftrightarrow \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x^{j'}}\right)_{x_0}$$

D'après les règles classique de dérivées partielles on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x^{j'}}\right)_{x_0} &= \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x^i}\right)_{x_0} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right)_{x_0} \\ \Rightarrow X_{p_0} &= X^i \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x^i}\right)_{x_0} = X^{j'} \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x^{j'}}\right)_{x_0} = X^{j'} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right)_{x_0} \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x^i}\right)_{x_0} \end{aligned}$$

En identifiant on obtient donc les formules de changement de composantes suivantes :

$$X^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right)_{x_0} X^{j'}$$

Par analogie, on trouve les formules de changement de composantes inverses :

$$X^{j'} = \left(\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\right)_{x_0} X^i$$

Chapitre 6

Calcul tensoriel dans une variété différentielle

Dans ce chapitre, nous allons définir un certain nombre de notions essentielles, avant d'aborder la géométrie pseudo-riemannienne, coeur de nos préoccupations, dans le chapitre 7. Dans la première partie, nous introduirons en particulier les concepts fondamentaux de champ de vecteurs et de transformations locales. Dans la deuxième partie, nous définirons (enfin) les tenseurs et les champs de tenseurs dans le cadre général des variétés différentielles. Dans la troisième partie, il s'agira de l'étude de la dérivée de Lie, "dérivée directionnelle de champ de tenseurs".

6.1 Quelques compléments sur les variétés

Dans toute la première partie, V_n désignera une variété différentielle.

6.1.1 Fibré tangent et champs de vecteurs

Définissons un ensemble appelé fibré tangent qui est la réunion, sur tous les points x de V_n , des espaces vectoriels tangents $T_x V_n$ à la variété V_n .

Définition 6.1 : Fibré tangent à une variété

Le fibré tangent TV_n à une variété V_n est la réunion ensembliste :

$$TV_n = \bigcup_{x \in V_n} (\{x\} \times T_x V_n)$$

qui s'écrit également :

$$TV_n = \{(x, X_x) / x \in V_n, X_x \in T_x V_n\}$$

On en déduit immédiatement la proposition suivante que l'on admet.

Proposition 6.2 : (admise)

Le fibré tangent TV_n possède une structure naturelle de variété différentielle de dimension $2n$.

Soit V_n une variété différentielle et TV_n le fibré tangent de V_n .

Définition 6.3 : Champ de vecteurs sur une variété

Un champ de vecteurs, également champ de vecteurs tangents, sur V_n est une application X :

$$X : V_n \rightarrow TV_n : x \mapsto X(x) = (x, X_x)$$

Remarque : C'est une application qui associe, à tout point x de V_n , ce point et un vecteur de l'espace tangent $T_x V_n$.

Définition 6.4 : Champ de vecteurs différentiable sur une variété

Un champ de vecteurs sur V_n est dit différentiable si l'application qui le définit est de classe C^∞ (au sens de la définition 4.14).

Remarque : Cela impose à la variété V_n d'être de classe C^∞ .

Notation : L'ensemble des champs de vecteurs différentiables sur V_n est noté $\mathcal{X}(V_n)$.

Définition 6.5 : Composantes locales d'un champ de vecteurs

Un champ de vecteurs différentiable X sur V_n associe à tout point x de V_n un vecteur X_x de $T_x V_n$ qui s'écrit :

$$X_x = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x$$

Les $X^i = \frac{dx^i}{dt}(t)$ sont appelées composantes locales du champ de vecteurs X . Le champ X étant différentiable, les composantes locales sont des fonctions différentiables des n coordonnées x^i du point courant x .

Notation : Notons $C^\infty(V_n)$ l'anneau $C^\infty(V_n, \mathbb{R})$.

Proposition 6.6 :

Un champ de vecteurs différentiable sur V_n définit une dérivation sur $C^\infty(V_n)$:

$$X : C^\infty(V_n) \rightarrow C^\infty(V_n) : g \mapsto X(g) = \left(\frac{\partial g}{\partial x^i} \right)_x \frac{dx^i}{dt}(t)$$

Notation : On écrira souvent Xg au lieu de $X(g)$.

Preuve : La linéarité :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall g, h \in C^\infty(V_n), X(ag + bh) = aXg + bXh$$

et la règle de dérivation :

$$\forall g, h \in C^\infty(V_n), X(gh) = gXh + hXg$$

se montrent en se ramenant aux coordonnées locales.

Proposition 6.7 : (admise)

L'ensemble $\mathcal{X}(V_n)$ est un module sur l'anneau $C^\infty(V_n)$. On est donc capable d'additionner deux champs de vecteurs différentiables, et de les multiplier (à gauche) par une fonction de $C^\infty(V_n)$.

Soient X et Y dans $\mathcal{X}(V_n)$.

Définition 6.8 :

Le produit de deux champs de vecteurs X et Y est un opérateur défini par :

$$\forall g \in C^\infty(V_n), (XY)g = X(Yg)$$

Proposition 6.9 : (admise)

Le produit de deux champs de vecteurs X et Y n'est pas un champ de vecteurs différentiable.

Remarque : Le produit XY de deux champs de vecteurs différentiables X et Y n'étant pas un champ de vecteurs différentiable, formons une quantité faisant apparaître le produit XY et qui est un champ de vecteurs différentiable.

Définition 6.10 :

L'opération crochet est l'application :

$$[\] : \mathcal{X}(V_n) \times \mathcal{X}(V_n) \rightarrow \mathcal{X}(V_n) : (X, Y) \mapsto [X, Y] := XY - YX$$

Le crochet $[X, Y]$ opère sur $C^\infty(V_n)$:

$$[X, Y] : C^\infty(V_n) \rightarrow C^\infty(V_n) : g \mapsto [X, Y]g := X(Yg) - Y(Xg)$$

Proposition 6.11 : (admise)

Le crochet de deux champs de vecteurs différentiables est encore un champ de vecteurs différentiable.

Remarque : Cette proposition est le résultat à retenir de cette sous-partie.

6.1.2 Transformation locale de V_n

Soit V_n une variété différentielle, J un intervalle de \mathbb{R} et X un champ de vecteurs sur V_n . Il s'agit alors de savoir si, étant donné le champ X , il existe une courbe de V_n dont chaque vecteur tangent est un vecteur du champ X . On appelle cette courbe hypothétique arc de courbe intégrale du champ X :

Définition 6.12 : Arc de courbe intégrale du champ X

Un arc de courbe intégrale du champ X est un arc de courbe $c : J \rightarrow V_n : t \mapsto c(t)$ tel que, pour tout t dans J :

$$\frac{dc}{dt}(t) = X(c(t))$$

Cela signifie qu'à tout instant t , le vecteur tangent à c est un vecteur du champ X évalué au point $c(t)$ de V_n .

La proposition suivante va assurer l'existence de telles courbes. On suppose pour la suite que les variétés, les champs de vecteurs et les applications introduites sont de classe C^∞ .

Proposition 6.13 : Transformation locale de V_n (admise)

Etant donné un champ X de $\mathcal{X}(V_n)$ et un point x_0 de V_n , il existe un ouvert U contenant x_0 , un intervalle $I =]-\epsilon, \epsilon[$ de \mathbb{R} et une application différentiable Φ :

$$\Phi : I \times U \rightarrow V_n : (t, x) \mapsto \Phi(t, x) = \Phi_t(x)$$

telle que, pour tout x de U :

$$\begin{cases} I \rightarrow V_n : t \mapsto \Phi_t(x) & \text{est un arc de courbe intégrale du champ } X \\ \Phi_0(x) = x \end{cases}$$

Φ_t est appelée transformation locale de V_n engendrée par le champ X . C'est un difféomorphisme entre voisinage de V_n :

$$\Phi_t : V_n \rightarrow V_n : x \mapsto \Phi_t(x)$$

vérifiant donc l'équation différentielle sur $I \times U$:

$$\frac{d\Phi_t}{dt}(t) = X(\Phi_t(t))$$

et la condition initiale sur U :

$$\Phi_0(x) = x$$

Remarque : La transformation locale $\Phi_t : x_0 \mapsto \Phi_t(x_0) = x$ fait remonter x_0 le long de la courbe $t \mapsto \Phi_t(x_0)$: vers le passé si $t < 0$ ou vers le futur si $t > 0$. Elle peut être interprétée comme un changement de coordonnées sur U . On avait initialement un système de coordonnées, dans une carte locale, qui donnait à x_0 les coordonnées (x_0^i) . La transformation locale attribuée à ce point les nouvelles coordonnées $(\Phi_t(x_0)^i)$.

6.1.3 Espace vectoriel cotangent

Définissons maintenant l'espace vectoriel cotangent, qui n'est rien d'autre que le dual de l'espace vectoriel tangent.

Définition 6.14 : Espace vectoriel cotangent

L'espace vectoriel cotangent, en x , à V_n est le dual de l'espace $T_x V_n$: il est noté $T_x^* V_n$. C'est l'ensemble des formes linéaires sur l'espace vectoriel tangent. Les éléments de $T_x^* V_n$ sont aussi appelés covecteurs.

Explicitons maintenant sa base canonique, via la base canonique de l'espace vectoriel tangent.

Définition 6.15 : Corepère

La base canonique de $T_x^* V_n$, base duale de la base canonique de $T_x V_n$, est appelée corepère de $T_x^* V_n$. La base de $T_x V_n$ étant, dans le système de coordonnées (x^i) , les n vecteurs tangents $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, le corepère de $T_x^* V_n$ est constitué des n formes linéaires dx^i définies par :

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i$$

Les dx^i associent à tout élément X de $T_x V_n$, la i -ème composante de sa décomposition dans la base $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Etablissons alors les formules de changement de bases.

Proposition 6.16 : Changement de corepère

Envisageons deux bases naturelles de $T_x V_n$ relativement à deux systèmes de coordonnées différents (avec la convention de l'indice primé) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \longleftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}} \right)$$

Cela induit un changement de corepère (dx^i) en $(dx^{j'})$. Pour ω dans $T_x^* V_n$, on écrit :

$$\omega = \omega_i dx^i = \omega_{j'} dx^{j'}$$

Le même raisonnement que celui effectué dans la partie (5.2.3) donne alors les formules de changement de composantes :

$$\omega_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \omega_{j'}$$

Et :

$$\omega_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \omega_i$$

6.2 Tenseur en un point - Champ de tenseurs

Définissons dans cette deuxième partie les tenseurs dans le cadre général des variétés différentielles. Commençons, dans une première sous-partie, par définir les tenseurs en un point d'une variété différentielle, avant de définir, dans une seconde sous-partie, les champs de tenseurs. Dans toute cette deuxième partie, V_n désignera une variété différentielle.

6.2.1 Tenseur en un point

Définition 6.17 : Tenseur en un point

Un tenseur de type $\binom{q}{p}$ au point x de V_n est une forme T $(p + q)$ -linéaire définie sur le produit cartésien $(T_x V_n)^p \times (T_x^* V_n)^q$ de p espaces $T_x V_n$ et q espaces $T_x^* V_n$. C'est donc un élément de :

$$L_{p+q}((T_x V_n)^p \times (T_x^* V_n)^q, \mathbb{R})$$

l'ordre dans le produit devant être précisé. On note plus simplement :

$$T \in T_x^q p$$

Les tenseurs de type $\binom{q}{p}$ sont encore appelés tenseurs p fois covariants et q fois contravariants, ou tenseurs mixtes $\binom{q}{p}$.

Remarque : Les tenseurs sont donc des êtres mathématiques intrinsèques. Cependant, le physicien travaille plutôt avec ses composantes dans une base. Les exemples (3) à (7) traduisent la définition ci-dessus en terme de composantes, pour plusieurs types de tenseurs.

Exemples :

(1) Un élément de $T_x V_n$ est un tenseur de type $\binom{1}{0}$: c'est une forme linéaire sur $T_x^* V_n$. Les tenseurs de type $\binom{1}{0}$ au point x d'une variété V_n sont donc les vecteurs de $T_x V_n$. L'espace vectoriel $T_x V_n$ est donc noté également $T_x^1 0$.

(2) Un élément de $T_x^* V_n$ est un tenseur de type $\binom{0}{1}$: c'est une forme linéaire sur $T_x V_n$. L'espace $T_x^* V_n$ des formes linéaires sur $T_x V_n$ se note donc $T_x^0 1$.

(3) Un tenseur de type $\binom{0}{2}$ au point x de V_n est une forme bilinéaire définie sur $T_x V_n \times T_x V_n$. On montre que les n^2 formes bilinéaires notées $dx^i \otimes dx^j$ définies à l'aide des vecteurs du corepère de $T_x^* V_n$:

$$dx^i \otimes dx^j : T_x V_n \times T_x V_n \rightarrow \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto dx^i \otimes dx^j(X, Y) = dx^i(X)dx^j(Y) = X^i Y^j$$

forment une base de T_x^0 . Un tenseur T de type $\binom{0}{2}$ s'écrit donc, avec la convention d'Einstein :

$$T = T_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

les réels $T_{ij} = T(e_i, e_j)$ étant appelés composantes de T (les e_i sont les n vecteurs de la base naturelle de $T_x V_n$).

(4) Un tenseur de $\binom{0}{p}$ au point x de V_n est une forme p -linéaire définie sur $(T_x V_n)^p$. Les éléments T de cet espace T_x^0 s'écrivent :

$$T = T_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p}$$

dans la base $(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p})$ de T_x^0 , et avec $T_{i_1 \dots i_p} = T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$. La base $(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p})$ est définie de la même manière que la base $dx^i \otimes dx^j$.

(5) Un tenseur de type $\binom{2}{0}$ au point x de V_n est une forme bilinéaire définie sur $T_x^* V_n \times T_x^* V_n$. Considérons les n formes linéaires e_k définies sur $T_x^* V_n$ par :

$$e_k : T_x^* V_n \rightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto e_k(\omega) = \omega_k$$

Les e_k associent à tout élément ω de $T_x^* V_n$, la k -ème composante de sa décomposition dans le corepère dx^k . On montre alors que les n^2 forment bilinéaires notées $e_i \otimes e_j$ définies à l'aide des γ_k :

$$e_i \otimes e_j : T_x^* V_n \times T_x^* V_n \rightarrow \mathbb{R} : (\omega, \mu) \mapsto e_i \otimes e_j(\omega, \mu) = e_i(\omega) e_j(\mu) = \omega_i \mu_j$$

forment une base de cet espace T_x^2 . Tout élément T de T_x^2 s'écrit alors :

$$T = T^{ij} e_i \otimes e_j$$

où les $T^{ij} = T(dx^i, dx^j)$ sont définies à partir du corepère de $T_x^* V_n$.

(6) Un tenseur de $\binom{q}{0}$ au point x de V_n est une forme q -linéaire définie sur $(T_x^* V_n)^q$. Les éléments T de cet espace T_x^q s'écrivent :

$$T = T^{i_1 \dots i_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$$

dans la base $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q})$ de T_x^q , et avec $T^{i_1 \dots i_q} = T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_q})$. La base $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q})$ est définie de la même manière que la base $e_i \otimes e_j$.

(7) De la même manière, les tenseurs de type $\binom{q}{p}$ définis sur $(T_x V_n)^p \times (T_x^* V_n)^q$, plus précisément par exemple sur $\underbrace{(T_x V_n \times \dots \times T_x V_n)}_{p \text{ fois}} \times \underbrace{(T_x^* V_n \times \dots \times T_x^* V_n)}_{q \text{ fois}}$ s'écrivent :

$$T = T_{i_1 \dots i_p}^{i_{p+1} \dots i_{p+q}} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p} \otimes e_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_{p+q}}$$

dans la base $(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p} \otimes e_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_{p+q}})$ de T_x^q , définies à l'aides des bases $(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p})$ et $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q})$.

(8) Par convention, les tenseurs de type $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont les scalaires.

Proposition 6.18 : Changement de bases (admise)

Lors d'un changement de base naturelle (e_i) , associée au système de coordonnées (x^i) , en $(e_{j'})$, associée au système de coordonnées $(x^{j'})$, qui induit un changement de corepère (dx^i) en $(dx^{j'})$, les composantes $T_{i_1 \dots i_p}$ d'un tenseur de type $\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$ dans la base $(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p})$ sont changées en les composantes $T_{j'_1 \dots j'_p}$ dans la base $(dx^{j'_1} \otimes \dots \otimes dx^{j'_p})$ selon :

$$T_{j'_1 \dots j'_p} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{j'_p}} T_{i_1 \dots i_p}$$

De la même manière, les composantes $T^{i_1 \dots i_q}$ d'un tenseur de type $\begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q})$ sont changées en les composantes $T^{j'_1 \dots j'_q}$ dans la base $(e_{j'_1} \otimes \dots \otimes e_{j'_q})$ selon :

$$T^{j'_1 \dots j'_q} = \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{i_q}} T^{i_1 \dots i_q}$$

La combinaison des deux donne les formules de changement de composantes pour un tenseur de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$, le produit des facteurs étant celui de l'exemple (7) :

$$T_{j'_1 \dots j'_p}^{j'_{p+1} \dots j'_{p+q}} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{j'_p}} \frac{\partial x^{j'_{p+1}}}{\partial x^{i_{p+1}}} \dots \frac{\partial x^{j'_{p+q}}}{\partial x^{i_{p+q}}} T_{i_1 \dots i_p}^{i_{p+1} \dots i_{p+q}}$$

Définition 6.19 : Somme de deux tenseurs

Soient T et U deux tenseurs de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ au point x de V_n . Soient $T_{i_1 \dots i_p}^{i_{p+1} \dots i_{p+q}}$ et $U_{i_1 \dots i_p}^{i_{p+1} \dots i_{p+q}}$ leurs n^{p+q} composantes dans la base $(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p} \otimes e_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_{p+q}})$ de $T_{x,p}^q$. Le tenseur somme $T + U$ est par définition le tenseur de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ au point x dont les n^{p+q} composantes dans la base $(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p} \otimes e_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_{p+q}})$ de $T_{x,p}^q$ sont $T_{i_1 \dots i_p}^{i_{p+1} \dots i_{p+q}} + U_{i_1 \dots i_p}^{i_{p+1} \dots i_{p+q}}$.

Remarque : Il est possible de définir la somme de deux tenseurs de manière intrinsèque en se ramenant à la somme dans $L_{p+q}((T_x V_n)^p \times (T_x^* V_n)^q, \mathbb{R})$.

Définition 6.20 : Multiplication d'un tenseur par un scalaire

Soit T un tenseur de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ au point x de V_n . Soient $T_{i_1 \dots i_p}^{i_{p+1} \dots i_{p+q}}$ ses n^{p+q} composantes dans la base $(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p} \otimes e_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_{p+q}})$ de $T_{x,p}^q$. Le produit du tenseur T par un scalaire λ est par définition le tenseur de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ au point x dont les n^{p+q} composantes dans la base $(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p} \otimes e_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_{p+q}})$ de $T_{x,p}^q$ sont $\lambda T_{i_1 \dots i_p}^{i_{p+1} \dots i_{p+q}}$.

Remarque : Même remarque.

Proposition 6.21 : Espace vectoriel de tenseurs

En vertu des deux définitions (6.19) et (6.20), l'ensemble des tenseurs de type $\binom{q}{p}$ au point x de V_n forme un espace vectoriel de dimension n^{p+q} .

Remarque : Rappelons qu'un tenseur de type $\binom{q}{p}$ au point x de V_n est une forme $(p+q)$ -linéaire du type :

$$T : T_x^* V_n \times \dots \times T_x^* V_n \times T_x V_n \times \dots \times T_x V_n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(w_{(1)}, \dots, w_{(q)}, X_{(1)}, \dots, X_{(p)}) \mapsto T(w_{(1)}, \dots, w_{(q)}, X_{(1)}, \dots, X_{(p)})$$

où l'ordre des espaces peut être modifié pour obtenir un autre tenseur de type $\binom{q}{p}$.

Définition 6.22 : Produit tensoriel

La multiplication tensorielle de tout tenseur T de type $\binom{q}{p}$ au point x de V_n avec tout tenseur U $\binom{s}{r}$ au point x de V_n est l'application :

$$T_{x_p}^q \times T_{x_r}^s \rightarrow T_{x_{p+r}}^{q+s} : (T, U) \mapsto T \otimes U$$

le produit tensoriel $T \otimes U$ étant tel que :

$$T \otimes U(w_{(1)}, \dots, w_{(q)}, w_{(q+1)}, \dots, w_{(q+s)}, X_{(1)}, \dots, X_{(p)}, X_{(p+1)}, \dots, X_{(p+r)})$$

$$= T(w_{(1)}, \dots, w_{(q)}, X_{(1)}, \dots, X_{(p)})U(w_{(q+1)}, \dots, w_{(q+s)}, X_{(p+1)}, \dots, X_{(p+r)})$$

Remarque : On vérifie que la multiplication tensorielle est bilinéaire, associative mais n'est pas commutative.

Définition 6.23 : Contraction d'un tenseur

Soit T un tenseur de type $\binom{q}{p}$ au point x de V_n . La contraction du tenseur T consiste à choisir un indice de covariance et un indice de contravariance, à les évaluer et à sommer par rapport à cet indice répété.

Exemple : Soit par exemple un tenseur T de type $\binom{2}{1}$ au point x d'une variété différentielle V_n .

Soient T_k^{ij} ses composantes dans la base $e_i \otimes e_j \otimes dx^k$:

$$T = T_k^{ij} e_i \otimes e_j \otimes dx^k$$

Si on contracte les indices i et k on obtient le tenseur V de composantes V^j :

$$V^j = T_i^{ij}$$

C'est un tenseur de type $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a alors naturellement la proposition suivante.

Proposition 6.24 :

Toute contraction d'un tenseur mixte lui enlève à la fois une contravariance et une covariance.

Définition 6.25 : Multiplication contractée

La multiplication contractée est la multiplication tensorielle suivie de la contraction.

Remarque : De cette définition, on retrouve le critère de tensorialité élémentaire évoqué dans le chapitre 3.

6.2.2 Champ de tenseurs

Définissons un ensemble appelé fibré vectoriel de tenseurs qui est la réunion, sur tous les points x de V_n , des tenseurs de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ au point x , à p et q fixés.

Définition 6.26 : Fibré vectoriel de tenseurs

Le fibré vectoriel des tenseurs de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ à la variété V_n est l'ensemble noté $T_p^q V_n$ défini par :

$$T_p^q V_n = \{(x, T_x) / x \in V_n, T_x \in T_{x,p}^q\}$$

On en déduit alors la proposition suivante, que l'on admet. Pour la démonstration, voir [Talpaert].

Proposition 6.27 : (admise)

Le fibré vectoriel $T_p^q V_n$ a une structure naturelle de variété différentielle.

Définition 6.28 : Champ de tenseurs sur une variété

Un champ de tenseurs de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ sur V_n est une application :

$$T : V_n \rightarrow T_p^q V_n : x \mapsto T(x) = (x, T_x)$$

Définition 6.29 : Champ de tenseurs différentiable sur une variété

Un champ de tenseurs sur V_n est dit différentiable si l'application qui le définit est de classe C^∞ .

Remarque : Cela impose à la variété V_n d'être de classe C^∞ .

6.3 Dérivée de Lie

Dans cette troisième sous-partie, définissons un nouveau type de dérivée, directionnelle, appelée dérivée de Lie. Dans cette partie, V_n désignera une variété différentielle de classe C^∞ , et Φ_t une transformation locale de V_n (engendrée par un champ X de $\mathcal{X}(V_n)$).

6.3.1 Dérivée de Lie d'une fonction scalaire

Définissons, dans un premier temps, la dérivée de Lie d'une fonction scalaire.

Définition 6.30 : Dérivée de Lie d'une fonction scalaire

La dérivée de Lie d'une fonction g de $C^\infty(V_n)$ dans la direction X au point x est la dérivée directionnelle :

$$L_X g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\Phi_t(x_0)) - g(x_0)}{t}$$

Remarque : On retrouve la définition de la dérivée classique d'une fonction scalaire, la subtilité étant que l'on fait glisser la variable le long d'un arc de courbe intégrale.

Proposition 6.31 : (admise)

La définition ci-dessus se traduit en coordonnées par :

$$L_X g = X^i \partial_i g$$

Remarque : Pour la démonstration, se référer à [Talpaert].

6.3.2 Dérivée de Lie d'un champ de tenseurs

Définissons maintenant la dérivée de Lie d'un champ de tenseurs. Soit donc T un champ de tenseurs de type quelconque sur V_n .

Définition 6.32 : Transporté d'un tenseur

Soit x_0 un point de U et $x = \Phi_t(x_0)$ l'image de x_0 par Φ_t . Notons T_{x_0} le champ T évalué au point x_0 . Le transporté $\mathcal{T}_t T_{x_0}$ par Φ_t du tenseur T_{x_0} est le tenseur défini au point x dont les composantes sont celles de T_{x_0} exprimées dans le "nouveau" système de coordonnées.

Exemple : Soit T un champ de tenseurs de type $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sur V_n et T_{x_0} le champ au point x_0 :

$$T_{x_0} = T_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x_0^i} \otimes dx_0^j \otimes dx_0^k$$

exprimé dans l'ancien système de coordonnées. Le tenseur $\mathcal{T}_t T_{x_0}$ a alors pour composantes :

$$\mathcal{T}_t T_{x_0} = (\tau_t T_{x_0})_{su}^r \frac{\partial}{\partial x^r} \otimes dx^s \otimes dx^u = T_{jk}^i \frac{\partial x^r}{\partial x_0^i} \frac{\partial}{\partial x^r} \otimes \frac{\partial x_0^j}{\partial x^s} dx^s \otimes \frac{\partial x_0^k}{\partial x^u} dx^u$$

en utilisant les formules de changement de base utilisées précédemment. Le transporté a donc pour composantes, dans la nouvelle base :

$$(\mathcal{T}_t T_{x_0})_{su}^r = T_{jk}^i \frac{\partial x^r}{\partial x_0^i} \frac{\partial x_0^j}{\partial x^s} \frac{\partial x_0^k}{\partial x^u}$$

Définition 6.33 : Dérivée de Lie d'un champ de tenseurs

La dérivée de Lie d'un champ de tenseurs T dans la direction de X , au point $x = \Phi_t(x_0)$ de V_n est un tenseur $L_X T$ de même type défini par :

$$L_X T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_x - \mathcal{T}_t T_{x_0}}{t}$$

Traduisons en terme de coordonnées la définition précédente sur des champs de tenseurs particuliers.

Proposition 6.34 : Dérivée de Lie d'un champ de vecteurs

Soit Y un champ de vecteurs différentiable. La dérivée de Lie du champ Y dans la direction X au point x s'écrit alors :

$$L_X Y = (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i) \partial_i$$

Preuve : On note Y_0 le champ Y au point x_0 de V_n . Décomposons alors Y_0 sur la base $\frac{\partial}{\partial x_0^j}$ de $T_{x_0} V_n$:

$$Y_0 = Y_0^j \frac{\partial}{\partial x_0^j}$$

Le transporté $\mathcal{T}_t Y_0$ par Φ_t de Y_0 s'écrit alors dans la base $\frac{\partial}{\partial x^j}$ de $T_x V_n$:

$$\mathcal{T}_t Y_0 = Y_0^j \frac{\partial x^r}{\partial x_0^j} \frac{\partial}{\partial x^r}$$

Soit donc :

$$(\mathcal{T}_t Y_0)^i = Y_0^j \frac{\partial x^i}{\partial x_0^j}$$

D'autre part, le champ Y au point x , noté Y_x a pour composantes :

$$Y_x^i = Y_0^i + \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\right)_{x_0} (x^j - x_0^j) + \dots$$

Or, pour le point x voisin de x_0 , on peut écrire :

$$x^i = x_0^i + X_0^i t + \dots$$

puisque :

$$(x^i)' = (\Phi_t(x_0)^i)' = X_0^i$$

On a alors donc :

$$(\mathcal{T}_t Y_0)^i = Y_0^j (\delta_j^i + (\frac{\partial X^i}{\partial x^j})_{x_0} t + \dots)$$

Et :

$$Y_x^i = Y_0^i + (\frac{\partial Y^i}{\partial x^j})_{x_0} X_0^j t + \dots$$

Il ne reste plus qu'à faire la différence :

$$Y_x^i - (\mathcal{T}_t Y_0)^i = (X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j})_{x_0} t + \dots$$

puis à diviser par t et à passer à la limite.

Remarque : On montre que cette expression est précisément celle du crochet $[X, Y]$, soit donc que :

$$L_X Y = [X, Y]$$

Proposition 6.35 : Dérivée de Lie d'un champ de tenseurs deux fois covariant

Soit T un champ de tenseurs différentiable de type $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. La dérivée de Lie du champ T dans la direction X au point x est un tenseur de type $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ qui a pour composantes :

$$(L_X T)_{ij} = X^k \partial_k T_{ij} + T_{kj} \partial_i X^k + T_{ir} \partial_j X^r$$

Remarque : Pour la démonstration, se référer à [Talpaert].

Chapitre 7

Variétés pseudo-riemanniennes

Dans ce chapitre, nous allons introduire sur une variété différentielle la notion de métrique - donnée de formes bilinéaires symétriques non-dégénérées sur les espaces tangents - et étudier la géométrie induite par celle-ci. L'étude de ces métriques, dites pseudo-euclidiennes, constitue ce que l'on appelle la géométrie pseudo-riemannienne.

Les concepts les plus notables de la géométrie pseudo-riemannienne sont la courbure de l'espace étudié et les géodésiques, courbes résolvant un problème de plus court chemin sur cet espace.

La configuration intrinsèque des variétés, envisagée dans cette nouvelle géométrie, est d'un apport primordial aux théories modernes de la physique, et en particulier à la théorie de la relativité générale. Nous verrons en effet, dans le chapitre 8, que l'espace-temps de la relativité générale est un cas particulier de variété pseudo-riemannienne, appelée variété lorentzienne.

7.1 Notion de variété pseudo-riemannienne

Dans cette partie, V_n désignera une variété différentielle de classe C^p ($p \geq 3$).

7.1.1 Tenseur métrique et variété pseudo-riemannienne

Munissons la variété V_n d'une métrique définie en tout point de la variété.

Définition 7.1 : Tenseur métrique pseudo-riemannien et métrique pseudo-riemannienne

Soit g un champ de tenseurs sur V_n , de type $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de classe C^{p-1} :

$$g : V_n \rightarrow T_2^0 V_n : x \mapsto g_x$$

Les formes bilinéaires g_x sont appelées tenseur métrique (au point x) pseudo-riemannien si, en tout point de V_n , elles sont symétriques :

$$\forall x \in V_n, \forall X, Y \in T_x V_n, \quad g_x(X, Y) = g_x(Y, X)$$

et non-dégénérées :

$$\forall x \in V_n, \forall X \in T_x V_n, \quad g_x(X, Y) = 0 \Leftrightarrow Y = 0$$

Le champ g est appelé métrique pseudo-riemannienne.

Remarque (1) : Quand il n'y aura aucune ambiguïté, on dira parfois tenseur métrique et métrique, le qualificatif pseudo-riemannien étant sous-entendu.

Remarque (2) : On a donc défini un tenseur métrique sur chaque espace tangent. Ce tenseur métrique est a priori différent sur chaque espace, puisque, dans le cas général, le champ g n'est pas uniforme.

Définition 7.2 : Variété pseudo-riemannienne

Le couple (V_n, g) , où g est une métrique pseudo-riemannienne, est appelé variété pseudo-riemannienne.

Remarque (1) : Soit x un point de V_n et g_x le tenseur métrique sur $T_x V_n$. Notons (e_i) la base naturelle de $T_x V_n$ et posons :

$$g_{ij} = g_x(e_i, e_j)$$

Les conditions imposées à g se traduisent respectivement, en terme de coordonnées, par :

$$\forall x \in V_n, \quad g_{ij} = g_{ji}$$

et :

$$\forall x \in V_n, \quad \det(g_{ij}) \neq 0$$

Remarque (2) : Nous avons, au chapitre 2, calculé les composantes du tenseur métrique dans les cas particuliers des coordonnées polaires et sphériques.

Remarque (3) : Si les formes bilinéaires symétriques g_x sont définies positives alors on parle de tenseur métrique euclidien (un produit scalaire !), de métrique euclidienne et de variété riemannienne.

Définition 7.3 : Élément linéaire

L'élément linéaire de la variété V_n est le scalaire (intrinsèque) :

$$ds^2 = g_{ij} X^i Y^j$$

Définition 7.4 : Signature de la métrique

Soit x un point de V_n et g_x le tenseur métrique sur $T_x V_n$. g_x étant symétrique, la matrice associée est diagonalisable dans le groupe orthogonal et à valeurs propres réelles. En utilisant les formules de changement de bases des tenseurs de type $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, et en se rappelant l'inversibilité de la matrice des g_{ij} , on peut montrer que g_x s'écrit :

$$g_x = dx^1 \otimes dx^1 + \dots + dx^p \otimes dx^p - dx^{p+1} \otimes dx^{p+1} - \dots - dx^{p+q} \otimes dx^{p+q}$$

avec $p + q = n$. La signature de g_x est le couple (p, q) : elle ne dépend pas du choix du repère.

Exemples :

(1) Si $q = 0$, la métrique est euclidienne, le tenseur métrique est euclidien et la variété est riemannienne : on a un produit scalaire sur chaque espace tangent. L'étude de ces métriques constitue la géométrie riemannienne.

(2) Si $p = 1$, la métrique est dite lorentzienne, le tenseur métrique est dit lorentzien et la variété est dite lorentzienne. L'étude de ces métriques constitue la géométrie lorentzienne. C'est dans ce cadre là que l'on se placera pour l'étude de la relativité générale.

7.1.2 Pseudo produit scalaire

Soit (V_n, g) une variété pseudo-riemannienne : en tout point x de V_n , on est muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée g_x sur l'espace tangent $T_x V_n$. Donnons alors un certain nombre de définitions qui généralisent les notions connues de produit scalaire et de norme.

Définition 7.5 : Pseudo produit scalaire

Le pseudo produit scalaire de deux vecteurs X et Y de $T_x V_n$ est défini par le tenseur métrique g_x :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : T_x V_n \times T_x V_n \rightarrow \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle = g_x(X, Y)$$

Remarque (1) : En coordonnées locales, le pseudo produit scalaire de deux vecteurs de $T_x V_n$ s'écrit alors :

$$\langle X, Y \rangle = g_x(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j$$

Remarque (2) : Dans le cas d'une forme bilinéaire symétrique définie positive, on retrouve le produit scalaire euclidien usuel, cas particulier de pseudo produit scalaire.

Définition 7.6 : Espace vectoriel pseudo-euclidien

On dit que le tenseur métrique g_x munit l'espace vectoriel $T_x V_n$ d'une structure d'espace vectoriel pseudo-euclidien.

Remarque : Dans le cas d'une forme bilinéaire symétrique définie positive, les espaces tangents sont alors des espaces vectoriels euclidiens.

Définition 7.7 : Orthogonalité

Deux vecteurs X et Y de $T_x V_n$ sont orthogonaux si leur pseudo produit scalaire est nul.

Définition 7.8 : Pseudo-norme

La pseudo-norme est la quantité :

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

Dans le cas général d'une variété pseudo-riemannienne, cette quantité peut être un réel positif (au sens large) ou un imaginaire, puisque $\langle X, X \rangle$ peut être positif, négatif ou nul.

Remarque : Dans le cas particulier d'une variété riemannienne, on retrouve la définition de la norme (issue du produit scalaire) des espaces euclidiens.

7.1.3 Isomorphisme canonique et tenseur conjugué

Soit (V_n, g) une variété pseudo-riemannienne.

Proposition 7.9 : Isomorphisme canonique

Il existe un isomorphisme (canonique) entre $T_x V_n$ et $T_x^* V_n$ défini par l'application Ψ :

$$\Psi : T_x V_n \rightarrow T_x^* V_n : X \mapsto \Psi(X) = g_x(X, \cdot)$$

Preuve : L'application Ψ est clairement linéaire et elle est injective car g_x est non dégénérée. Cela suffit pour conclure (dimension finie n).

Aux composantes X^i de X correspondent les composantes notées X_i de la forme linéaire associée, et on a :

$$X_i = g_x(X, e_i) = g_x(X^j e_j, e_i) = g_{ij} X^j$$

Si on désigne par g^{ij} la matrice inverse des g_{ij} (elle existe puisque $\det(g_{ij}) \neq 0$), alors, des égalités :

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$$

on tire :

$$X^j = g^{ij} X_i$$

On retrouve évidemment les résultats établis dans le chapitre 1.

Proposition 7.10 : Tenseur conjugué

Les g^{ij} sont les n^2 composantes d'un tenseur de type $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ appelé tenseur conjugué du tenseur g_x .

Preuve : La bilinéarité repose sur la bilinéarité de g_x . Pour plus de détails, voir [Talpaert].

Remarque : La tensorialité des g^{ij} peut se montrer à l'aide d'un critère de tensorialité élémentaire (cf. chapitre 3). On voit, en effet, que la contraction entre les g^{ij} et les X_i , composantes d'un

tenseur de type $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, a pour résultat un tenseur de type $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: les g^{ij} sont donc les composantes d'un tenseur de type $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On rappelle que les développements précédents relatifs aux vecteurs et covecteurs se généralisent aux tenseurs de type quelconque via des formules analogues :

$$\begin{aligned} g^{sp} A_{sqr} &= A_{qr}^p \\ g^{qs} A_r^{ps} &= A_{qr}^p \end{aligned}$$

Précisons enfin que le produit contracté, répété, par le tenseur métrique permet d'associer canoniquement, à tout tenseur de type $\begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}$, un tenseur de type $\begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$, et réciproquement, par :

$$\begin{aligned} T_{i_1 \dots i_q} &= g_{i_1 j_1} \dots g_{i_q j_q} T^{j_1 \dots j_q} \\ T^{i_1 \dots i_q} &= g^{i_1 j_1} \dots g^{i_q j_q} T_{j_1 \dots j_q} \end{aligned}$$

7.2 Connexion linéaire et dérivée covariante d'un champ de vecteurs

Nous allons définir de façon rigoureuse la dérivée covariante et les symboles de Christoffel, notions que nous avons introduites dans le chapitre 3.

7.2.1 Définitions

Dans cette sous-partie, on désignera par V_n une variété de classe C^∞ .

Définition 7.11 : Connexion linéaire - Dérivée covariante d'un champ de vecteurs

Une connexion linéaire sur V_n est une application ∇ :

$$\nabla : \mathcal{X}(V_n) \times \mathcal{X}(V_n) \rightarrow \mathcal{X}(V_n) : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

telle que :

$$\begin{aligned} \forall f, h \in C^\infty(V_n), \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(V_n), \\ \nabla_{fX+hY}(Z) &= f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z \\ \nabla_X(Y+Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z \\ \nabla_X(fY) &= f\nabla_X Y + L_X fY \end{aligned}$$

On dit que $\nabla_X Y$ est la dérivée covariante du champ Y , le long d'une courbe de champ de vecteurs tangents X .

Remarque (1) : On écrit abusivement " fX " au lieu de " $f(x)X(x), \forall x \in V_n$ " pour alléger les notations. Par la suite, on utilisera d'ailleurs la notation X pour parler à la fois du champ de vecteurs et de ses éléments.

Remarque (2) : En particulier, si X est e_j , on note la dérivée covariante de Y dans la direction de e_j par :

$$\nabla_{e_j} Y = \nabla_j Y$$

Montrons maintenant que la dérivée covariante est totalement déterminée par la donnée, dans toute carte locale de domaine U , de n^3 fonctions :

$$\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$$

Définition 7.12 : Symboles de Christoffel de deuxième espèce

Soit U un domaine quelconque de V_n , x un point de U et e_i la base locale de l'espace tangent associé. Les symboles de Christoffel de deuxième espèce Γ_{ij}^k sont les composantes, dans la base locale, de la dérivée covariante :

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$$

Les symboles de Christoffel de deuxième espèce permettent alors d'exprimer la dérivée covariante en coordonnées locales (x^i).

Proposition 7.13 :

Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{X}(V_n)$. La dérivée covariante du champ Y , le long d'une courbe de champ de vecteurs tangents X , s'écrit en coordonnées locales :

$$\nabla_X Y = X^r \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^r} + Y^s \Gamma_{rs}^i \right) e_i$$

c'est à dire :

$$(\nabla_X Y)^i = X^r \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^r} + Y^s \Gamma_{rs}^i \right)$$

Preuve : Ecrivons les vecteurs X et Y dans la base locale (e_i) :

$$\begin{aligned} X &= X^i e_i \\ Y &= Y^j e_j \end{aligned}$$

On a alors successivement, en utilisant les propriétés de la dérivée covariante :

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^i e_i} (Y^j e_j) \\ &= X^i \nabla_{e_i} (Y^j e_j) \\ &= X^i (Y^j \nabla_{e_i} (e_j) + L_{e_i} Y^j e_j) \\ &= X^i (Y^j \nabla_{e_i} (e_j) + \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} e_j) \end{aligned}$$

et puisque (cf. proposition 6.31) :

$$L_{e_i} Y^j = \delta_i^k \frac{\partial Y^j}{\partial x^k}$$

Définition 7.14 : Vecteur Accélération

Soit X , élément de $\mathcal{X}(V_n)$, le champ de vecteurs tangents à un arc de courbe c , modélisant le déplacement d'un point p de la variété. La dérivée covariante $\nabla_X X$ du champ X le long de c est appelée vecteur accélération du point p .

Définition 7.15 : Tenseur dérivée covariante

Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{X}(V_n)$, U un domaine quelconque de V_n , x un point de U et e_i la base locale de l'espace tangent associé.

Le tenseur dérivée covariante de Y au point x est le tenseur de type $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ au point x , noté ∇ , dont le produit contracté avec X est la dérivée covariante de Y dans la direction de X . En coordonnées locales, cette définition se traduit par :

$$(\nabla Y)_j^i = \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + Y^s \Gamma_{js}^i$$

On admet la proposition suivante, pour la démonstration voir, par exemple, [Talpaert].

Proposition 7.16 : (admise)

Les symboles de Christoffel de deuxième espèce ne sont pas les composantes d'un tenseur.

7.2.2 Interprétation géométrique de la dérivée covariante

Soit V_n une variété de classe C^∞ et c un arc de courbe de V_n passant par x_0 (cf. définition 5.1). Désignons par :

$$X = \frac{d}{dt} = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

le champ de vecteurs tangents à la courbe c .

Soit Y un champ de vecteurs différentiable $Y_{c(t)}$ tangents à V_n en chaque point $c(t)$ de la courbe, et notons Y_0 le vecteur $Y_{c(0)}$.

Le procédé pour interpréter la dérivée covariante géométriquement sera le même que celui utilisé dans le chapitre 6 pour définir la dérivée de Lie.

Définissons une première notion importante, que nous avons évoquée au chapitre 3 lors de la définition du tenseur dérivée covariante.

Définition 7.17 : Champ de vecteurs parallèle le long d'une courbe

Le champ de vecteurs Y est parallèle le long de c si :

$$\forall t \in [a, b], (\nabla_X Y)_{c(t)} = 0$$

qui s'écrit en coordonnées locales :

$$X^r \left(\frac{\partial Y^r}{\partial x^j} + Y^k \Gamma_{jk}^r \right) \frac{\partial}{\partial x^r} = 0$$

La notion de parallélisme permet alors d'interpréter géométriquement la dérivée covariante.

Proposition 7.18 : (admise)

La dérivée covariante du champ Y le long de la courbe de vecteurs tangents X est :

$$\nabla_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\mathcal{T}^{-1} Y_{c(t)})_0 - Y_0]$$

où $\mathcal{T}^{-1} Y_{c(t)}_0$ est le vecteur du champ Y transporté parallèlement en arrière au point x_0 , le long de c , ce qui signifie transporté en vérifiant la condition :

$$\nabla_X Y = 0$$

7.2.3 Connexion de Levi-Civita

Nous allons montrer que l'on peut associer à toute variété riemannienne (V_n, g) , V_n de classe C^∞ , une unique connexion vérifiant une hypothèse dite de torsion nulle et "tuant" la métrique g .

Définition 7.19 : Torsoin nulle

Une connexion ∇ sur V_n est dite de torsion nulle si, sur tout domaine U de V_n , les symboles de Christoffel de deuxième espèce associés sont symétriques en leurs indices inférieurs :

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$$

Remarque (1) : C'est l'hypothèse que nous avons faite le chapitre 3.

Remarque (2) : On peut montrer que la nullité de la torsion est équivalente à :

$$\forall X, Z \in \mathcal{X}(V_n), \nabla_X Z = \nabla_Z X + [X, Z]$$

Proposition 7.20 : Connexion de Levi-Civita (admise)

Sur une variété pseudo-riemannienne (V_n, g) , il existe une unique connexion linéaire ∇ de torsion nulle telle que :

$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(V_n), L_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Cette connexion est appelée connexion de Levi-Civita de (V_n, g) .

Remarque : Encore une fois, la notation utilisée est abusive et signifie en fait :

$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(V_n), \forall x \in V_n, L_X g_x(Y, Z) = g_x(\nabla_X Y, Z) + g_x(Y, \nabla_X Z)$$

où l'on confond toujours les champs de vecteurs et les vecteurs eux-mêmes.

Preuve : Procédons par condition nécessaire et suffisante. Supposons qu'une telle connexion linéaire existe, alors nécessairement il existe un champ de vecteurs $\nabla_X Y$ défini par :

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \{L_X g(Y, Z) + L_Y g(Z, X) - L_Z g(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X)\} \quad (7.1)$$

En effet, par hypothèse :

$$g(\nabla_X Y, Z) = L_X g(Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

La torsion étant nulle, on a :

$$g(Y, \nabla_X Z) = g(Y, \nabla_Z X + [X, Z])$$

D'où :

$$g(\nabla_X Y, Z) = L_X g(Y, Z) - g(Y, [X, Z]) - g(Y, \nabla_Z X) \quad (7.2)$$

Or de la même manière :

$$g(Y, \nabla_Z X) = L_Z g(Y, X) - g(X, [Z, Y]) - L_Y g(X, Z) - g(\nabla_Y X, Z) \quad (7.3)$$

Et :

$$g(\nabla_Y X, Z) = g(\nabla_X Y, Z) - g([X, Y], Z) \quad (7.4)$$

(7.4) dans (7.3) puis, (7.3) dans (7.2) redonne bien (7.1).

Réciproquement, le champ $\nabla_X Y$ étant défini par (7.1), la forme bilinéaire ainsi définie conduit à l'existence d'une connexion de Levi-Civita car les trois propriétés d'une connexion linéaire sont vérifiées, ainsi que la nullité de la torsion et l'équation :

$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(V_n), L_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Définition 7.21 : Symboles de Christoffel de première espèce

Les symboles de Christoffel de première espèce Γ_{kij} sont définis par :

$$\Gamma_{kij} = g(\nabla_{e_i} e_j, e_k)$$

On a, de façon évidente, la relation :

$$\Gamma_{kij} = g_{rk} \Gamma_{ij}^r$$

Enfin, la symétrie $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ implique la symétrie $\Gamma_{kij} = \Gamma_{jik}$.

On peut alors démontrer les formules déjà présentées dans le chapitre 3, mais ici dans le cadre général des variétés pseudo-riemanniennes.

Proposition 7.22 :

$$\begin{aligned} \Gamma_{kij} &= \frac{1}{2} \{ \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \} \\ \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{kr} \{ \partial_i g_{jr} + \partial_j g_{ri} - \partial_r g_{ij} \} \end{aligned}$$

Preuve : L'équation (7.1) donne sur les vecteurs de base :

$$g(\nabla_{e_i} e_j, e_k) = \Gamma_{kij} = \frac{1}{2} \{ \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \}$$

puisque :

$$[e_i, e_j] = [e_k, e_i] = [e_k, e_j] = 0$$

et par définition, en coordonnées locales, de la dérivée de Lie d'un tenseur deux fois covariant. La seconde formule se montre en utilisant la définition (7.21).

Démonstrons alors les identités dites de Ricci, elles-aussi déjà présentées dans le chapitre 3.

Proposition 7.23 : Identités de Ricci

$$\partial_i g_{jk} = g_{kr} \Gamma_{ij}^r + g_{jr} \Gamma_{ik}^r$$

Preuve : On utilise l'équation que vérifie la connexion de Levi-Civita sur les vecteurs de la base locale :

$$L_X g(Y, Z) = g(\nabla_{e_i} e_j, e_k) + g(e_j, \nabla_{e_i} e_k)$$

qui s'écrit :

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{jik}$$

ou :

$$\partial_i g_{jk} = g_{kr} \Gamma_{ij}^r + g_{jr} \Gamma_{ik}^r$$

7.2.4 Géodésiques et équations d'Euler

Les courbes d'accélération nulle jouent un rôle évidemment particulier en physique classique puisqu'elles correspondent aux trajectoires que suivent les particules libres. Dans le cadre mathématique de la physique classique (espace affine de dimension trois), en coordonnées rectilignes ou curvilignes, ces courbes sont des droites. Essayons de voir à quoi correspondent ces courbes dans le cadre des variétés pseudo-riemanniennes.

Soit donc (V_n, g) une variété pseudo-riemannienne et soit c un arc de courbe différentiable sur V_n :

$$c : [a, b] \rightarrow V_n : t \mapsto c(t)$$

Définition 7.24 : Arc de courbe géodésique

Un arc de courbe géodésique (ou plus simplement géodésique) c est un arc de courbe tel que son champ de vecteurs tangents X est transporté parallèlement le long de c , c'est à dire si :

$$\nabla_X X = 0$$

En coordonnées locales, l'équation des géodésiques s'écrit donc sous la forme de n équations différentielles :

$$\frac{dX^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} X^j X^k = 0$$

ou :

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0$$

Remarque (1) : Dans le cas particulier riemannien, on peut montrer, en donnant un sens à la longueur entre a et b (typiquement $\int_a^b \sqrt{g_{c(t)}(\frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt})} dt$), que les arcs de courbes géodésiques sont précisément les arcs de courbes de V_n qui minimisent la longueur entre a et b . Dans le cas général, les formes bilinéaires g_x n'étant pas définies positives, l'intégrande peut être un nombre complexe, et il faut avoir recours à une autre définition de l'intégrale, que nous n'évoquons pas ici.

Remarque (2) : L'équation des géodésiques montre que les géodésiques d'une variété sont les trajectoires d'accélération nulle. On a donc réussi à caractériser ces courbes. Les équations de la relativité générale devront donc, si l'on veut "prolonger" le principe d'inertie de Newton, imposer aux particules libres de suivre des géodésiques.

7.3 Les tenseurs de la relativité générale

7.3.1 Tenseur de Riemann-Christoffel

Proposition 7.25 :

L'application de classe C^∞ :

$$\mathcal{X}(V_n) \times \mathcal{X}(V_n) \times \mathcal{X}(V_n) \rightarrow \mathcal{X}(V_n)$$

$$(X, Y, Z) \mapsto (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})Z = R(X, Y)Z$$

est linéaire en X , Y et Z .

$R(X, Y)$ est un tenseur de type $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note :

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$$

Preuve : On a, de façon évidente, pour tout élément X, Y, Z de $\mathcal{X}(V_n)$:

$$R(Y, X)Z = -R(X, Y)Z$$

Pour montrer la linéarité, il suffit alors de démontrer que :

$$\begin{aligned} \forall h \in C^\infty(V_n), \quad R(hX, Y)Z &= hR(X, Y)Z \\ R(X, Y)hZ &= hR(X, Y)Z \end{aligned}$$

Cela se montre facilement en utilisant les propriétés de la connexion de Levi-Civita. Pour le détail des calculs, voir [Talpaert].

Enfin, $R(X, Y)$ est bien un tenseur de type $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, puisque le résultat de son produit contracté par un tenseur de type $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le tenseur $R(X, Y)Z$ de type $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 7.26 :

Les composantes du tenseur $R(X, Y)Z$ sont dans une carte locale :

$$R(X, Y)Z = X^i Y^j Z^k (\partial_i \Gamma_{jk}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s + \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^s) \partial_s$$

Preuve : Si on écrit :

$$X = X^i \partial_i \quad Y = Y^j \partial_j \quad Z = Z^k \partial_k$$

Alors :

$$R(X, Y)Z = X^i Y^j Z^k R(\partial_i, \partial_j) \partial_k$$

Explicitons le terme :

$$R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = [\nabla_i, \nabla_j] \partial_k - \underbrace{\nabla_{[\partial_i, \partial_j]}}_{=0} \partial_k$$

On a successivement :

$$\begin{aligned} R(\partial_i, \partial_j) \partial_k &= \nabla_i (\nabla_j \partial_k) - \nabla_j (\nabla_i \partial_k) \\ &= \nabla_i (\Gamma_{jk}^s \partial_s) - \nabla_j (\Gamma_{ik}^s \partial_s) \\ &= \partial_i (\Gamma_{jk}^s) \partial_s + \Gamma_{jk}^s \nabla_i \partial_s - \partial_j (\Gamma_{ik}^s) \partial_s - \Gamma_{ik}^s \nabla_j \partial_s \\ &= (\partial_i \Gamma_{jk}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s + \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^s) \partial_s \end{aligned}$$

Définition 7.27 : Tenseur de Riemann-Christoffel

Pour tout X, Y, Z dans $\mathcal{X}(V_n)$, on peut définir un tenseur qui, opérant sur X, Y et Z conduit au tenseur $R(X, Y)Z$ de type $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: c'est donc un tenseur de type $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ce tenseur est appelé tenseur de Riemann-Christoffel, et d'après la proposition (7.26), ses composantes $R_k^s{}_{ij}$ dans une carte locale sont :

$$R_k^s{}_{ij} = \partial_i \Gamma_{jk}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s + \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^s$$

On a alors immédiatement la proposition suivante :

Proposition 7.28 :

Les composantes $R_k^s{}_{ij}$ du tenseur de Riemann-Christoffel sont antisymétriques en i et j .

Et la définition suivante :

Définition 7.29 : Espace plat

Un espace plat est une variété au tenseur de Riemann-Christoffel nul.

7.3.2 Tenseur de Ricci et scalaire de courbure

Introduisons maintenant le tenseur de Riemann-Christoffel de type $\binom{0}{4}$ défini par :

$$R(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T)$$

En coordonnées locales :

$$X = X^i \partial_i \qquad Y = Y^j \partial_j \qquad Z = Z^k \partial_k$$

On a alors :

$$g(R(X, Y)Z, T) = X^i Y^j Z^k T^m g_{lm} R_k^l{}_{ij} = X^i Y^j Z^k T^m R_{kmij}$$

Soit :

$$R_{kmij} = g_{lm} R_k^l{}_{ij}$$

Enumérons maintenant, sans les démontrer, un certain nombre de propriétés élémentaires que vérifie ce tenseur. Pour plus de détails, voir [Talpaert].

Proposition 7.30 :

P1. Le tenseur de Riemann-Christoffel de type $\binom{0}{4}$ est antisymétrique en ses deux derniers indices :

$$R(X, Y, T, Z) = -R(X, Y, Z, T)$$

Soit en coordonnées locales :

$$R_{kmji} = -R_{kmij}$$

P2. Il est également antisymétrique en ses deux premiers indices :

$$R(Y, X, Z, T) = -R(X, Y, Z, T)$$

Soit en coordonnées locales :

$$R_{mkij} = -R_{kmij}$$

P3. Il possède de plus la symétrie :

$$R(Z, T, X, Y) = R(X, Y, Z, T)$$

Soit en coordonnées locales :

$$R_{ijkl} = R_{klij}$$

P4. Et vérifie enfin la propriété :

$$R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0$$

Soit en coordonnées locales :

$$R_{kmij} + R_{kijm} + R_{kjmi} = 0$$

Nous allons, par contraction du tenseur de Riemann-Christoffel de type $\binom{0}{4}$, définir un nouveau tenseur d'ordre deux, symétrique, appelé tenseur de Ricci.

Définition 7.31 : Tenseur de Ricci

Le tenseur de Ricci est le tenseur symétrique de composantes :

$$R_{ij} = R_i^k{}_{kj} = g^{hk} R_{ihkj}$$

Remarque(1) : Le tenseur de Ricci est obtenu par contraction du tenseur de Riemann-Christoffel en ses deuxièmes et troisièmes indices. On peut montrer que toutes contractions du tenseur de Riemann-Christoffel conduisent au tenseur de Ricci ou à son opposé.

Remarque(2) : L'expression explicite du tenseur de Ricci est :

$$R_{ij} = R_i^k{}_{kj} = \partial_k \Gamma_{ji}^k - \partial_j \Gamma^k{}_{ki} + \Gamma_{ji}^r \Gamma_{kr}^k - \Gamma_{ki}^r \Gamma_{jr}^k$$

Définissons maintenant la courbure scalaire d'une variété pseudo-riemannienne par contraction du tenseur de Ricci.

Définition 7.32 : Courbure scalaire

La courbure scalaire d'une variété pseudo-riemannienne est le scalaire intrinsèque :

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

obtenu par contraction du tenseur de Ricci.

Exemple : Le cône est un espace plat, montrons que sa courbure scalaire est nulle.

Soit un cône de demi-angle d'ouverture θ , dans les coordonnées d'altitude u et de longitude ϕ .

Les équations du cône sont :

$$\begin{cases} x = tg\theta u \cos \phi \\ y = tg\theta u \sin \phi \\ z = u \end{cases}$$

D'où les différentielles :

$$\begin{cases} dx = tg\theta \cos \phi du - tg\theta u \sin \phi d\phi \\ dy = tg\theta \sin \phi du + tg\theta u \cos \phi d\phi \\ dz = du \end{cases}$$

On trouve alors l'expression du ds^2 :

$$ds^2 = (1 + tg^2\theta)du^2 + tg^2\theta u^2 d\phi^2$$

D'où les symboles de Christoffel suivants :

$$\begin{cases} \Gamma_{uu}^u = \Gamma_{u\phi}^u = \Gamma_{uu}^\phi = \Gamma_{\phi\phi}^\phi = 0 \\ \Gamma_{\phi\phi}^u = -\frac{tg^2\theta}{1+tg^2\theta}u \\ \Gamma_{u\phi}^\phi = \frac{1}{u} \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à utiliser l'expression du tenseur de Ricci, en fonction des symboles de Christoffel, pour trouver :

$$\begin{cases} R_{uu} = R_{u\phi} = R_{\phi\phi} = 0 \\ R = 0 \end{cases}$$

7.3.3 Identités de Bianchi et tenseur d'Einstein

Nous allons introduire un opérateur, noté $(\nabla_X R)(Y, Z)$, qui nous permet d'arriver à un résultat essentiel : l'identité de Bianchi. L'utilisation de cet opérateur permet de nous affranchir de la définition théorique du tenseur dérivée covariante d'un champ de tenseurs.

Proposition 7.33 : Identité de Bianchi (admise)

Soit X, Y , et Z trois champs de vecteurs différentiables.
On définit l'application $(\nabla_X R)(Y, Z)$ par :

$$(\nabla_X R)(Y, Z) : \mathcal{X}(V_n) \rightarrow \mathcal{X}(V_n)$$

$$T \mapsto (\nabla_X R)(Y, Z)T = \nabla_X(R(Y, Z)T) - R(\nabla_X Y, Z)T - R(Y, \nabla_X Z)T - R(Y, Z)\nabla_X T$$

Alors pour tout champ de vecteurs X, Y, Z , on a l'identité de Bianchi :

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0$$

Remarque : Pour pouvoir traduire cette identité en coordonnées locales, on ne peut plus s'affranchir de la notion de dérivée covariante d'un champ de tenseurs. Cette notion prolonge la notion de dérivée covariante d'un champ de vecteurs pour des tenseurs d'ordre quelconque et repose sur les mêmes idées. Nous avons fait le choix de ne pas la définir théoriquement ici, et de s'appuyer uniquement sur les développements du chapitre 3.

En coordonnées locales, les identités de Bianchi s'écrivent alors, en tout point d'une variété :

$$\nabla_i R_n^m{}_{jk} + \nabla_j R_n^m{}_{ki} + \nabla_k R_n^m{}_{ij} = 0$$

où $\nabla_i R_n^m{}_{jk}$ représente le tenseur dérivée covariante du tenseur de Riemann-Christoffel, comme on l'a défini dans le chapitre 3.

Si on contracte les indices m et k dans l'identité de Bianchi on trouve :

$$\nabla_i R_n^k{}_{jk} + \nabla_j R_n^k{}_{ki} + \nabla_k R_n^k{}_{ij} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\nabla_i R_{nj} + \nabla_j R_{ni} + \nabla_k R_n^k{}_{ij} = 0$$

Puis, par multiplication contractée avec g^{nj} , on arrive à :

$$-\nabla_i g^{nj} R_{nj} + \nabla_j g^{nj} R_{ni} + \nabla_k g^{nj} R_n^k{}_{ij} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\nabla_i R + \nabla_j R_i^j + \nabla_k R_i^k = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\nabla_j R_i^j - \nabla_i R = 0$$

Soit finalement :

$$\begin{aligned} 2\nabla_k g^{ir} R_i^k - \nabla_i g^{ir} R &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla_k (R^{rk} - \frac{1}{2} g^{kr} R) &= 0 \end{aligned}$$

Définition 7.34 : Tenseur d'Einstein

Le tenseur d'Einstein est le tenseur symétrique d'ordre deux de composantes :

$$S^{rk} = R^{rk} - \frac{1}{2} g^{kr} R$$

Il vérifie la propriété dite de conservativité :

$$\nabla_k S^{rk} = 0$$

Remarque : Ce tenseur joue un rôle majeur dans la théorie relativiste de la gravitation puisque c'est le tenseur utilisé pour caractériser la géométrie de l'espace-temps dans les équations du champ de gravitation d'Einstein. Nous en reparlerons dans le chapitre 9.

Troisième partie

La théorie de la relativité générale

Chapitre 8

Géométrie de la relativité générale

Au XVI^e siècle, Galilée affirme que les lois de la mécanique sont les mêmes dans des référentiels en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres : c'est le principe de relativité de Galilée. Les formules de changement de référentiels galiléens utilisent l'additivité des vitesses et amènent aux transformations dites de Galilée. Plus tard, avec Newton, les référentiels galiléens sont définis comme les référentiels dans lesquels une particule libre est soit au repos, soit dans un mouvement rectiligne uniforme.

Au XIX^e siècle, le physicien écossais James Clerk Maxwell formula un ensemble d'équations, les équations du champ électromagnétique, qui conduisit à prédire la propagation d'ondes électromagnétiques de vitesse $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ dans un milieu électrostatique de constante ϵ_0 et magnéto-statique de constante μ_0 . Ces équations ne sont pas invariantes par transformations de Galilée, et c'est ce qui pousse Einstein, à partir des travaux du physicien Hendrik Lorentz, à définir de nouvelles formules de changement de repères à l'aide des transformations dites de Lorentz. Les changements de repères galiléens ainsi définis permettent à Einstein de postuler le principe de relativité restreinte : les lois de la mécanique et de l'électromagnétisme sont les mêmes dans tous les repères galiléens.

La théorie de la relativité restreinte repose donc sur l'invariance des lois de la physique sous l'action des transformations de Lorentz. C'est précisément ce qui ne satisfait pas Einstein du point de vue épistémologique : pourquoi faire jouer un rôle particulier aux repères galiléens ?

Dans la théorie de la relativité générale (1907-1915), Einstein postule donc que les lois de la physique doivent être les mêmes dans tous les référentiels. Cela nécessite alors de définir une nouvelle structure mathématique pour l'espace-temps. Nous allons présenter dans ce chapitre quelle est cette structure mathématique et essayer de montrer pourquoi c'est la bonne pour représenter l'espace-temps dans le cadre de la relativité générale.

8.1 Principes et géométrie de la physique classique

Présentons de façon succincte les principes de la physique classique ainsi que la géométrie associée pour y décrire l'espace physique.

Principe de relativité galiléen : Les lois de la *mécanique* sont invariantes par changement de repère galiléen.

Définition des repères galiléens : Repères dans lesquels une particule libre est soit au repos, soit en mouvement rectiligne et uniforme. Donc si R est galiléen, et R' est en translation uniforme par rapport à R , alors R' est galiléen.

Changements de repères galiléens : On *suppose* que les changements de repères galiléens font appels aux transformations de Galilée.

Hypothèses sur l'espace physique :

- homogène (invariant par translation)
- isotrope (invariant par rotation)
- existence d'un *temps absolu* (le temps ne dépend pas du référentiel de l'observateur)

Principe de causalité : Tout effet a une cause et la cause précède l'effet dans tout repère galiléen.

Principe d'équivalence : La masse inerte et la masse grave sont supposées égales.

Conséquence : Tous les corps soumis uniquement à un même champ de gravitation chutent simultanément.

Structure mathématique de l'espace physique :

L'espace physique est identifié à un espace *affine* de dimension $\mathfrak{3}$, le temps paramétrant les trajectoires et les états du système étudié.

8.2 Principes et géométrie de la relativité restreinte

Présentons de façon succincte les principes de la théorie de la relativité restreinte ainsi que la géométrie associée pour y décrire l'espace-temps physique.

Principe de relativité restreinte : Les lois de la *mécanique et de l'électromagnétisme* sont invariantes par changement de repère galiléen.

Conséquence : La vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels galiléens.

Définition des repères galiléens : Repères dans lesquels une particule libre est soit au repos, soit en mouvement rectiligne et uniforme. Donc si R est galiléen, et R' est en translation uniforme par rapport à R , alors R' est galiléen.

Changements de repères galiléens : On *montre* que les changements de repères galiléens font appels aux transformations de Lorentz.

Hypothèses sur l'espace physique :

- homogène (invariant par translation)
- isotrope (invariant par rotation)
- **temps relatif** : la mesure du temps dépend du référentiel de l'observateur, mais au sein d'un référentiel donné le temps y est homogène

Principe de causalité : Tout effet a une cause et la cause précède l'effet dans tout repère galiléen d'un délai au moins égal à la durée nécessaire pour aller du lieu de la cause au lieu de l'effet à la vitesse indépassable c .

Conséquence : Si deux événements ne peuvent être joints à une vitesse inférieure ou égal à c , alors ils n'ont pas de lien de causalité.

Principe d'équivalence : La masse inerte et la masse grave sont supposées égales.

Conséquence : Tous les corps soumis uniquement à un même champ de gravitation chutent simultanément.

Structure mathématique de l'espace-temps physique :

L'espace-temps physique est identifié à un espace *affine* de dimension 4 appelé espace de Minkowski. L'espace vectoriel associé est muni d'une métrique pseudo-euclidienne de signature $(1,3)$ appelée métrique lorentzienne.

On y écrit des égalités entre quadrivecteurs pour assurer leur validité dans tout repère galiléen.

8.3 Principes et géométrie de la relativité générale

Nous voilà au coeur du sujet. Nous allons essayer d'expliquer dans cette partie pourquoi la géométrie dite lorentzienne est la bonne géométrie pour représenter l'espace-temps dans la théorie de la relativité générale. Notre justification va s'appuyer sur les postulats faits par Einstein dans le cadre de sa théorie : l'outil mathématique va donc apparaître comme la traduction naturelle de ses postulats, en terme mathématique.

8.3.1 Principe de relativité généralisé

En relativité restreinte, Einstein a postulé que les lois de la physique ont la même forme dans tous les repères galiléens, c'est à dire que les lois physiques sont invariantes par application de la transformation de Lorentz. Ce postulat pose deux problèmes à Einstein.

D'une part, et nous l'avons dit dans l'introduction de ce chapitre, il fait jouer un rôle particulier aux référentiels galiléens et comme le dit Einstein : "Qu'est-ce que la nature a affaire des systèmes de coordonnées et de leur état de mouvement, alors que c'est nous qui les avons introduits?".

D'autre part, la loi de Newton de la gravitation n'est pas Lorentz-invariante et, par suite, l'interaction gravitationnelle, modélisée par Newton, se propage à une vitesse infinie.

La théorie de la relativité générale va remédier à ces deux problèmes, en ne se limitant plus aux référentiels galiléens, mais en considérant aussi des référentiels accélérés. Einstein postule ainsi le principe dit de relativité généralisé.

Principe de relativité généralisé

Les lois de la *mécanique et de l'électromagnétisme* sont invariantes par changement de repère quelconque.

Conséquences : La structure mathématique de l'espace-temps ne doit pas privilégier de référentiels particuliers. Il faut donc construire un espace de points, dans lequel tous les référentiels sont équivalents : c'est précisément ce qui caractérise une variété différentielle, de dimension a priori quelconque.

De plus, les égalités que l'on y écrira doivent être intrinsèques puisqu'elles ne doivent pas dépendre du référentiel : les grandeurs physiques prendront donc la forme de champs de tenseurs sur la variété différentielle.

8.3.2 Principe d'équivalence

La loi de la dynamique de Newton postule que la résultante \vec{F} des forces appliquées à un corps est égale au produit de son accélération \vec{a} par un coefficient, appelé masse inerte et noté m_i : $\vec{F} = m_i \vec{a}$. D'autre part, Newton introduisit ce qu'on appelle la masse gravitationnelle notée m_g dans l'expression de la loi d'attraction universelle entre les corps. Cette dernière postule que la force \vec{F} qu'exerce une masse M_g sur une masse m_g est attractive, dirigée suivant l'axe reliant les centres des deux masses est inversement proportionnelle au carré de la distance r qui les sépare : $F = \frac{GM_g m_g}{r^2}$.

La masse inerte m_i et la masse gravitationnelle m_g peuvent être différentes a priori. Newton postula que le rapport entre ces deux masses ne dépendait pas du matériau, et donc qu'en choisissant un système convenable d'unités, on pouvait toujours écrire $m_i = m_g$. Newton n'avait fait que constater un résultat expérimental puis l'avait posé comme postulat, mais ne l'avait pas interprété.

Einstein donne une interprétation physique de ce principe à travers un exemple simple. Imaginons une boîte où une masse m est suspendue par un ressort au plafond de celle-ci. Lorsque la boîte se trouve immobile sur la Terre, la masse m subit un champ de gravitation g et elle étire le ressort d'une certaine longueur L . Imaginons à présent la même boîte suffisamment éloignée de la Terre pour ne plus subir d'influence gravifique, et supposons qu'elle soit soumise à une accélération de valeur g vers le haut. Le ressort subira également un allongement identique L . Les effets d'un champ de gravitation ou d'un champs d'accélération sont les mêmes. Un observateur situé à l'intérieur de la boîte ne pourra pas savoir si l'étirement du ressort est dû à la gravitation ou à l'accélération.

Dans un champ gravitationnel, l'allongement du ressort est déterminé par la masse gravitationnelle m_g du corps. Par contre, dans un champ d'accélération, ce même allongement est dû à la masse inertielle m_i du corps. Nous voyons alors apparaître l'égalité nécessaire entre la masse gravitationnelle et la masse inertielle puisque l'allongement L du ressort est identique dans les deux expériences.

C'est cette équivalence physique entre un champ de gravitation et un champ d'accélération qui constitue le principe d'équivalence d'Einstein. Il faut cependant la préciser.

Revenons à l'exemple de la boîte. Si on suppose que la boîte, plongée dans un champ de gravitation g , est en chute libre avec une accélération g alors tous les corps présents dans cette boîte apparaîtront comme non accélérés par rapport à celle-ci : par rapport à un tel référentiel, le champ gravitationnel extérieur est effacé. Dans ces référentiels, il est donc possible de s'assurer que $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$: ces référentiels sont galiléens. Les lois de la physique non gravitationnelle, c'est à dire de la relativité restreinte, s'appliquent donc dans ces types de référentiels en chute libre par rapport au champ de gravitation. On arrive alors à une nouvelle définition des repères galiléens qui sont désormais les référentiels en chute libre dans le champ de gravitation.

La formulation de cette équivalence a lieu pour une accélération constante et un champ de gravitation uniforme. Les champs de gravitation (par exemple celui de la Terre) n'étant en général pas uniformes, cette équivalence n'a un sens que dans un espace infiniment petit, où l'on peut considérer que le champ reste constant. Les repères galiléens sont donc définis localement et, par suite, la relativité restreinte est valable localement.

Principe d'équivalence d'Einstein

Un champ de gravitation est localement équivalent à un champ d'accélération.

Il est donc possible, localement, de définir des repères galiléens et de se placer dans le cadre de la relativité restreinte.

Conséquence : La structure mathématique de l'espace-temps doit permettre de se placer localement dans l'espace de Minkowski de la relativité restreinte. Mathématiquement, l'espace de Minkowski est donc l'espace tangent à la variété différentielle : cet espace étant de dimension 4, la variété différentielle espace-temps doit être de dimension 4. Enfin pour avoir, sur chaque espace tangent, un tenseur métrique lorentzien, de signature (1,3), il faut se donner un champ de métrique lorentzien.

L'espace-temps de la relativité générale est donc une variété lorentzienne de dimension 4.

Résumons les considérations de la partie 8.3 dans le tableau suivant.

Principe de relativité généralisé : Les lois de la *mécanique et de l'électromagnétisme* sont invariantes par changement de repère quelconque.

Définition des repères galiléens : Les repères galiléens sont les repères en chute libre dans le champ de gravitation.

Hypothèses de l'espace physique :

- homogène (invariant par translation)
- isotrope (invariant par rotation)

Principe de causalité : Tout effet a une cause et la cause précède l'effet dans tout repère galiléen d'un délai au moins égal à la durée nécessaire pour aller du lieu de la cause au lieu de l'effet à la vitesse indépassable c .

Conséquence : Si deux événements ne peuvent être joints à une vitesse inférieure ou égal à c , alors ils n'ont pas de lien de causalité.

Principe d'équivalence : La masse inerte et la masse grave sont supposées égales et, localement, les effets d'un champ gravitationnel sur une expérience n'utilisant pas la gravitation sont identiques aux effets d'une accélération du référentiel de l'observateur.

Structure mathématique de l'espace :

L'espace-temps physique est identifié à une *variété lorentzienne* de dimension 4 , localement identifiable à l'espace de Minkowski.

On y écrit des égalités entre tenseurs pour assurer leur validité pour tout point de la variété et pour **tout** repère.

Chapitre 9

Les équations d'Einstein du champ gravitationnel

Nous avons vu dans le chapitre 8 que les postulats de la relativité générale amènent à la définition d'une nouvelle structure mathématique de l'espace-temps : une variété lorentzienne à quatre dimensions. C'est dans ce cadre que nous allons, dans ce dernier chapitre, établir les équations du champ de gravitation d'Einstein.

9.1 A la recherche d'équations

Dans cette partie, nous allons essayer d'expliquer la démarche qui a permis à Einstein d'arriver à ses équations. L'idée prodigieuse d'Einstein, issue des travaux de Riemann, fut d'imaginer que la présence de matière au sein de l'espace-temps déformait sa géométrie. Ainsi, selon Einstein, la matière est responsable de la courbure de l'espace-temps.

9.1.1 La Matière-Energie déforme l'espace-temps

La remise en cause de la géométrie euclidienne au cours du XIX^e siècle incita les mathématiciens à discuter des fondements de nos représentations de la nature. Bernhard Riemann, dans son mémoire *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*, introduisit pour la première fois l'idée révolutionnaire d'une interaction possible entre les corps matériels et l'espace. Il remarqua, en effet, que dans l'infiniment petit (c'est à dire lorsque les rapports métriques tendent vers zéro) les concepts, jusque-là inébranlables, de corps solide et de rayon lumineux cessaient de subsister : un premier cap était franchi.

Einstein prolongea cette idée et affirma que les propriétés géométriques de l'espace-temps sont déterminées par la présence de matière (plus rigoureusement de Matière-Energie). Il chercha donc des équations traduisant cette idée-là, qui s'écrit qualitativement :

$$\text{MASSE-ENERGIE} = \text{COURBURE}$$

Montrons, à travers un exemple simple, comment se traduit en pratique cette équation qualitative.

Exemple : Dans un référentiel galiléen R , l'intervalle ds est déterminé par la relation :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$$

Considérons maintenant un référentiel R' en rotation à ω autour de l'axe (Oz) supposé commun aux deux. On rappelle les formules de changement de coordonnées dans ce cas :

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \qquad y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \qquad z = z'$$

Ce qui amène à :

$$ds^2 = [c^2 - \omega^2(x'^2 - y'^2)]dt^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) + 2\omega y' dx' dt - 2\omega x' dy' dt$$

Finalement, la présence d'accélération donne une forme tout à fait différente à l'intervalle ds , et par suite, les composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique sont elles aussi différentes.

Dans cette nouvelle géométrie, on peut montrer que le rapport entre la circonférence d'un cercle de R' et son diamètre n'est plus égal à π .

En utilisant le principe d'équivalence, on peut donc conclure que la présence d'un champ de gravitation entraîne une modification des composantes $g_{\alpha\beta}$: la présence de matière détermine les propriétés géométriques de l'espace-temps.

Revenons à l'équation :

MASSE-ENERGIE = COURBURE

Il faut chercher une relation, la plus simple possible, traduisant celle-ci, sachant qu'elle doit satisfaire un certain nombre de contraintes élémentaires :

- (i) Contrainte newtonienne [Condition de raccord] : Lorsque les vitesses des particules, étudiées dans un champ de gravitation peu intense, sont faibles alors il faut que les équations du champ de gravitation redonnent l'équation de Poisson. De plus, l'équation de Poisson faisant intervenir des dérivées d'ordre deux, et étant linéaire par rapport à celles-ci, on peut imaginer que les équations du champ de gravitation doivent faire intervenir des dérivées d'ordre au plus deux du tenseur métrique, et qu'elles doivent être linéaires pour les dérivées secondes.
- (ii) Courbure nulle à l'infini [Condition aux limites] : Lorsque l'on s'éloigne suffisamment de toute source de Matière-Energie, mathématiquement quand la distance à la source tend vers l'infini, il faut que la solution de l'équation tende vers la solution nulle.
- (iii) Caractère conservatif : Les équations doivent être les mêmes dans tous les systèmes de coordonnées : on cherche donc des équations tensorielles. Elles doivent bien sûr faire intervenir des tenseurs du même ordre et aux propriétés identiques. En particulier, si le membre de gauche de l'équation est un tenseur conservatif, alors le membre de droite doit l'être aussi.
- (iv) Homogénéité : Les équations doivent évidemment faire intervenir des grandeurs homogènes. L'éventuel coefficient d'homogénéisation ne doit faire intervenir que les constantes c et G , respectivement la célérité de la lumière et la constante de gravitation.

Il suffit alors de considérer les bons tenseurs, correspondant respectivement à l'Energie-Impulsion et à la courbure.

9.1.2 Le tenseur Energie-Impulsion $Q_{\alpha\beta}$

Décrivons dans cette partie succinctement le tenseur Energie-Impulsion $Q_{\alpha\beta}$; pour plus de détails, voir [Hladik]. Celui-ci est composé de deux termes distincts : un terme mécanique et un terme électromagnétique.

La partie mécanique $P^{\lambda\mu}$ du tenseur $Q_{\alpha\beta}$ a pour composantes :

$$\boxed{P^{\lambda\mu} = \rho c^2 u^\lambda u^\mu + T^{\lambda\mu}} \quad (9.1)$$

où le tenseur $T^{\lambda\mu}$ code les forces surfaciques tandis que les u^λ sont les composantes du quadri-vecteur vitesse unitaire.

On peut alors montrer que le tenseur $P^{\lambda\mu}$ vérifie l'équation :

$$\nabla_\mu (\rho c^2 u^\lambda u^\mu + T^{\lambda\mu}) = \Phi^\lambda \quad (9.2)$$

où Φ^λ est le quadri-vecteur force volumique. Cette équation traduit en coordonnées curvilignes, avec des notations évidentes, les équations de la dynamique relativiste et l'équation de conservation de la masse, pour un système massique continu :

$$\begin{cases} c\partial_0\rho + \rho\partial_k v^k - \frac{1}{c^2}\partial_k v_j t^{kj} = 0 \\ \rho c\partial_0 v^i - \frac{1}{c}\partial_0 v_j t^{ij} + \partial_k t^{ik} = f^i \end{cases}$$

Pour construire la partie électromagnétique, on va appliquer le résultat précédent aux forces électromagnétiques. Cette fois-ci on considère un milieu continu chargé. Or, le quadri-vecteur densité de force électromagnétique est le quadri-vecteur K^μ qui vérifie :

$$K^\mu = \frac{1}{c} J_\lambda F^{\lambda\mu}$$

où J_λ est le quadri-vecteur densité de courant et $F^{\lambda\mu}$ est le tenseur champ électromagnétique. A partir des équations de Maxwell, on peut alors créer un tenseur d'ordre deux symétrique $M_{\lambda\mu}$ tel que :

$$\begin{cases} -4\pi K_\lambda = \nabla_\mu M_{\lambda\mu} \\ \boxed{M_{\lambda\mu} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{4} g_{\lambda\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\lambda\alpha} F_\mu^\alpha \right)} \end{cases} \quad (9.3)$$

On prend alors K comme quadri-vecteur Φ dans l'équation (9.2) pour arriver à :

$$\nabla_\mu P^{\lambda\mu} = -\nabla_\mu M_{\lambda\mu}$$

Finalement on a donc construit le tenseur Energie-Impulsion $Q_{\alpha\beta}$ d'un milieu continu :

$$\boxed{Q^{\alpha\beta} = P^{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}} \quad (9.4)$$

C'est un tenseur d'ordre deux, clairement symétrique. Il vérifie la propriété dite de conservation :

$$\boxed{\nabla_\alpha Q^{\alpha\beta} = 0} \quad (9.5)$$

9.1.3 Le tenseur d'Einstein $S_{\alpha\beta}$

Nous avons vu dans le chapitre 7 que le tenseur qui détermine entièrement la géométrie de l'espace-temps est le tenseur de Riemann-Christoffel. Cependant, ce tenseur est un tenseur d'ordre quatre non conservatif, et n'a donc aucune chance d'intervenir dans une équation au côté du tenseur Energie-Impulsion.

C'est pour cela que nous avons construit, à partir du tenseur de Riemann-Christoffel, un tenseur d'ordre deux conservatif : le tenseur d'Einstein.

Nous avons vu que ce tenseur a pour composantes :

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R \quad (9.6)$$

et vérifie la propriété dite de conservativité :

$$\nabla_{\alpha}S^{\alpha\beta} = 0 \quad (9.7)$$

Il est légitime de se demander alors s'il est possible de construire, à partir du tenseur de Riemann-Christoffel, un tenseur d'ordre deux conservatif différent du tenseur d'Einstein. Elie Cartan a montré que les seuls tenseurs d'ordre deux conservatif vérifiant la contrainte (i) sont les tenseurs de composantes :

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + \Lambda g_{\alpha\beta} \quad (9.8)$$

Le coefficient Λ a une interprétation physique et a été introduit par Einstein en cosmologie pour modéliser un Univers statique, puis il l'a posé égal à 0 plusieurs années plus tard. Son statut est aujourd'hui encore controversé, mais il semblerait que le bon tenseur d'Einstein est le tenseur particulier pour $\Lambda = 0$. Le choix, dans la famille de tenseurs (9.8), est donc lié à des considérations physiques. Pour plus de détails sur ces considérations, voir par exemple [Hladik].

9.2 Les équations d'Einstein du champ gravitationnel

Nous avons vu, dans la partie précédente, quels tenseurs sont associés aux concepts de Matière-Energie et de courbure : respectivement, les tenseurs Impulsion-Energie $Q_{\alpha\beta}$ et d'Einstein $S_{\alpha\beta}$.

9.2.1 Expression générale des équations

Les équations d'Einstein du champ de gravitation sont alors simplement une relation de proportionnalité entre les deux :

$$S_{\alpha\beta} = \mathcal{K}Q_{\alpha\beta}$$

qui s'écrit :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \mathcal{K}Q_{\alpha\beta}$$

Remarque (1) : Ces équations sont des équations de champ, valables en tout point de la variété, et pour tout système de coordonnées.

Remarque (2) : Ces équations forment un système d'équations aux dérivées partielles d'inconnues $g_{\alpha\beta}(t, x, y, z)$. C'est a priori un système de 20 équations à 20 inconnues, mais les symétries réduisent le nombre d'inconnues à 10, puis la conservativité amène à un système à 6 inconnues.

Remarque (3) : Ces équations, de la forme $S_{\alpha\beta} = \mathcal{K}Q_{\alpha\beta}$, relient une *déformation* locale de la géométrie de l'espace-temps à la présence de *tensions*. Elles sont donc, en un sens, analogues aux équations fondamentales de l'élasticité de Hooke.

Remarque (4) : Par ces équations, il est clair que l'espace-temps n'est plus conçu, en relativité générale, comme un espace abstrait formé uniquement d'espace géométrique. La Matière-Energie, qui structure l'espace-temps, est un élément à part entière de celui-ci. L'espace-temps est donc un tout, formé à la fois de géométrie et de Matière-Energie.

Vérifions les contraintes que nous avons évoquées plus haut.

La contrainte newtonienne (i) et l'homogénéité (iv) seront discutées dans la sous-partie suivante et permettront de donner l'expression du coefficient \mathcal{K} .

La contrainte (iii) est vérifiée puisque ces équations font intervenir des tenseurs du même ordre (ordre deux, deux fois covariants) et conservatifs. La vérification de la contrainte (ii) est laissée au lecteur.

9.2.2 Limite newtonienne

Montrons que l'équation d'Einstein se réduit aux lois de la gravitation de Newton en utilisant l'approximation des champs faibles et des mouvements lents. Cette approximation va nous permettre de calculer le coefficient \mathcal{K} et d'assurer alors la réalisation des contraintes (i) et (iv). Dans un premier temps, établissons l'expression de la métrique dans cette approximation. Pour cela, nous allons construire l'intervalle ds à partir du lagrangien relativiste, pour une particule à faible vitesse et de masse m dans un champ gravitationnel. Celui-ci s'écrit, via un développement limité :

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - m\Phi$$

L'action S associée à cette particule est par définition :

$$S = \int Ldt = -mc \int \left[c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\Phi}{c} \right] dt$$

Or, en relativité restreinte, l'action peut toujours se mettre sous la forme :

$$S = -mc \int ds$$

Ce qui amène à :

$$ds = \left[c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\Phi}{c} \right] dt$$

D'où :

$$ds^2 = [c^2 + 2\Phi]dt^2 - dr^2$$

avec $dr = vdt$.

On a alors le tenseur métrique suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{2\phi}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculons, dans un second temps, les termes du tenseur de Ricci $R_{\alpha\beta}$ de deux manières différentes.

Considérons pour cela un tenseur particulier d'énergie impulsion $P^{\alpha\beta}$ d'un système macroscopique constitué de particules en mouvement. La masse de système est notée ρ : c'est la somme des masses au repos des particules dans une unité de volume. Le tenseur d'Energie-Impulsion se réduit alors à $Q^{\alpha\beta} = P^{\alpha\beta} = \rho c^2 u^\alpha u^\beta$.

On rappelle que l'on se place dans le cas d'un mouvement macroscopique très lent, dans un champ de gravitation peu intense. On peut alors affirmer que seule la composante temporelle de la quadrivitesse n'est pas négligeable ; elle est telle que : $u^0 = -u_0 = 1$.

Par conséquent, seule la composante temporelle P^0_0 subsiste et elle égale à $P^0_0 = -\rho c^2$, et donc la trace P de $P^{\alpha\beta}$ vaut elle aussi $-\rho c^2$.

Les équations d'Einstein donnent alors :

$$R^\alpha_\beta - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta R = \mathcal{K}P^\alpha_\beta$$

En contractant les indices α et β on trouve :

$$R = -\mathcal{K}P^\alpha_\alpha = -\mathcal{K}P$$

Ce qui amène à :

$$R^\alpha_\beta = \mathcal{K}(P^\alpha_\beta - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta P)$$

Finalement, en prenant $\alpha = \beta = 0$ on obtient :

$$\boxed{R^0_0 = -\frac{\mathcal{K}}{2}\rho c^2}$$

Calculons maintenant le terme R^0_0 d'une seconde façon, en utilisant la définition du tenseur de Ricci :

$$R_{kj} = \partial_k \Gamma_{i s}^k - \partial_s \Gamma_{i k}^k + \Gamma_{i s}^l \Gamma_{k l}^k - \Gamma_{i k}^l \Gamma_{s l}^k$$

Dans cette formule, les produits des $\Gamma_{i k}^k$ sont des infiniment petits du second ordre, nous allons donc les négliger. De plus, les dérivées par rapport à x^0 contiennent une puissance supplémentaire en $\frac{1}{c}$ par rapport aux autres dérivées : nous pouvons donc les négliger aussi.

Pour calculer R^0_0 il suffit de calculer $R_{00} = -R^0_0 = \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha$. Or, on a trouvé plus haut :

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

D'où :

$$\Gamma_{00}^\alpha \approx -\frac{1}{2}g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha}$$

Donc on a :

$$R^0_0 = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{00}}{\partial x^{\alpha}} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^{\alpha 2}} = -\frac{1}{c^2} \Delta \Phi$$

Et avec l'expression précédente de R^0_0 :

$$\mathcal{K} = \frac{2\Delta \Phi}{\rho c^4}$$

Enfin l'équation du champ de gravitation newtonien a pour expression :

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho$$

Par conséquent, pour avoir un champs limite newtonien à partir des équations d'Einstein lorsque le champ de gravitation est peu intense, et pour des faibles vitesses, il faut que :

$$\boxed{\mathcal{K} = \frac{8\pi G}{c^4}}$$

La limite newtonienne a donc permis de valider les contraintes (i) et (iv).

Finalement, les équations d'Einstein s'écrivent donc :

$$\boxed{R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \frac{8\pi G}{c^4}Q_{\alpha\beta}}$$

Conclusion et discussion

La théorie de la relativité générale a permis de répondre à un problème épistémologique que posait la relativité restreinte en faisant jouer un rôle particulier aux repères galiléens. Elle fait intervenir un arsenal mathématique conséquent pour décrire une géométrie nouvelle éloignée de l'intuition.

Une centaine de pages plus loin, l'outillage mathématique acquis, nous avons tenté de justifier l'utilisation de la géométrie lorentzienne, cas particulier de géométrie pseudo-riemannienne. Nous nous sommes alors rendus compte que cette géométrie pouvait être interprétée comme une traduction mathématique quasi directe des postulats d'Einstein. C'est en effet elle qui apparaît naturellement pour garantir le respect des principes de relativité et d'équivalence. Nous avons en cela répondu à notre interrogation principale.

Revenons maintenant à la seconde interrogation que nous nous étions posés dans l'introduction, et à laquelle nous avons déjà partiellement répondu au cours de celle-ci. Il s'agissait de comprendre pourquoi la géométrie avait une place aussi importante dans la théorie de la relativité générale.

Les équations d'Einstein amènent à considérer un nouvel objet physique, constitué à la fois de géométrie et de matière. Cette entité, que nous pourrions appeler Espace-Temps-Matière, ne doit pas être considéré comme l'union des deux mais comme un nouvel objet à part entière. Cette considération est du même type que celle faite en physique quantique lorsque l'on définit le quanton. Ce dernier est présenté comme étant l'unique objet physique du cadre quantique, et n'est ni une onde, ni une particule, ni les deux à la fois, et encore moins l'un ou l'autre selon les cas. Le quanton est un nouvel objet qui, dans certaines conditions très particulières, a des propriétés proches de celles d'une particule ou d'une onde.

La clé de la compréhension des équations de la relativité générale est donc le fait d'interpréter la géométrie comme étant indissociable de la physique, et non plus comme un arrière-plan pré-existant sur lequel seraient placés les corps physiques.

Terminons par une réflexion autour des équations d'Einstein. Ces équations sont des équations de champ et modélisent donc l'interaction gravitationnelle par le concept, issu de la physique classique, de champ médiateur. Si Einstein a cherché à expliquer la gravitation par une théorie de champ, c'était pour prolonger l'analogie avec l'électromagnétisme. Ces deux phénomènes s'exprimaient en effet de manière similaire en terme de forces, et Maxwell ayant réussi à élaborer une théorie de champ pour l'électromagnétisme, Einstein voulu en faire de même pour la gravitation.

À partir de ses équations, Einstein a logiquement prédit l'existence d'ondes gravitationnelles. Elles restent à jour hypothétiques puisque jamais directement mesurées. Elles seraient l'analogue, pour les corps massifs accélérés, des ondes électromagnétiques produites par les particules chargées accélérées. Lorsqu'un corps massif est accéléré, l'espace-temps autour de lui doit en permanence se réajuster, ce qui se traduirait par de légères perturbations qui se propageraient à la vitesse de la lumière. La détection d'ondes gravitationnelles, et par suite de gravitons, permet-

trait de faire un pas décisif vers une théorie quantique de la gravitation, qui cherche à expliquer celle-ci à l'aide du concept de particule médiatrice. Cette détection est notamment le but de l'interféromètre monumental de Virgo dont les bras font chacun 3 km de long.

Toulouse, juin 2011

Bibliographie

- [Feynman] Richard P. Feynman, *Leçons sur la gravitation*, éditions Odile Jacob, 2007.
- [Hladik] Jean Hladik, *Introduction à la relativité générale*, éditions Ellipses, 2006.
- [Hobson] M.P. Hobson, G.P. Efstathiou et A.N. Laseby, *Relativité générale*, éditions de Boeck, 2009.
- [Jeanperrin] Claude Jeanperrin, *Utilisation du calcul tensoriel dans les géométries riemanniennes*, éditions Ellipses, 2000.
- [Ludvigsen] Malcom Ludvigsen, *La Relativité générale-une approche géométrique*, éditions Dunod, 2000.
- [Mavridès] Stamatia Mavridès, *La Relativité*, presses universitaires de France, 2000.
- [Provost-Vallée] Jean-Pierre Provost et Gérard Vallée, *Les maths en physique*, éditions Dunod, 2010.
- [Talpaert] Yves Talpaert, *Leçons et applications de géométrie différentielle*, Cépaduès éditions, 1993.